FUJIEXIDONGLIXITONG

复解析动力系统

任福尧 主编



复旦大学出版社

复解析动力系统

任福尧　主编
编著者
邱维元　尹永成　乔建永
张文俊　周维民　龚志民

复旦大学出版社

责任编辑 范仁梅
责任校对 马金宝

复解析动力系统

任福尧 主编

出 版 复旦大学出版社
(上海国权路579号 邮政编码 200433)
发 行 新华书店上海发行所
印 刷 江苏丹阳教育印刷厂
开 本 850×1168 1/32
印 张 11.875
字 数 342 000
版 次 1997年12月第1版 1997年12月第1次印刷
印 数 1—1 000
书 号 ISBN 7-309-01958-X/O·178
定 价 15.00元

内 容 提 要

本书以经典的 Fatou-Julia 理论为基础，重点介绍了本世纪 80 年代以来复解析动力系统这一学科的卓越成就，其中包括有理函数动力系统、代数函数和代数体函数的动力系统，以及多复变全纯映射的动力系统等研究成果.

本书可作为研究生和高年级学生选修课的教材，也可作为教师和科技人员的参考书.

前　　言

复解析动力系统的研究初创于第一次世界大战期间. P. Fatou 和 G. Julia 受 Newton 迭代法以及 Möbius 变换群的子群的极限集的启发,产生了 Riemann 球面上复解析动力系统的研究思想. 两人独立地发表了相当数量的研究简报,此后又发表了很长的学术论文. Julia 的主要工作发表于 1918 年,Fatou 的主要工作发表于 1919 至 1920 年. 当时,他们运用新的正规族理论(如 Montel 定理等)于动力系统,证明了一系列非凡、漂亮的结果,完成了复动力系统的奠基工作,形成了经典的 Fatou-Julia 理论.

80 年代以来,这一领域又受到广泛的关注,已成为国际上公认的复分析的主要研究方向之一. 许多国际上著名的数学家如 A. Douady, J. H. Hubbard, W. Thurston, I. N. Baker 和 J-C. Yoccoz 等均在这一研究领域作出了杰出贡献. 目前这一研究领域的突出特点是拓扑学、代数理论以及现代分析理论的综合运用. 特别是,近年来大型电子计算机的飞速发展,给研究工作提供了有效的实验工具. 人们借助于先进的快速计算和模拟手段实现了历史上的许多构想,也为这一学科的发展进一步提供了可靠的原始素材.

值得一提的是,动力系统、分形几何以及混沌学是紧密相关的三个学科. 事实上,动力系统理论中的主要研究对象 Julia 集一般具有分形结构,而用于产生动力系统的映照在 Julia 集上呈混沌状态. 已经发现,这三个学科在采矿、信息处理、石油勘探及水力学中有很大的应用价值.

近五年来在国际上已有四本复动力系统方面的专著,它们是 A. F. Beardon 的“*Iteration of Rational Functions*”(1991 年),L. Carleson 和 T. Gamelin 所著的“*Complex Dynamics*”(1993 年),N. Steimntz 所著的“*Rational Iteration—Complex Dynamics System*”(1993 年),以及

R. L. Devaney 所著的“*Complex Dynamical System: The Mathematics behind the Mandelbrot and Julia Sets*”(1994 年). 这些书都各有特色，但它们只讨论有理函数的动力系统.

本书以经典的 Fatou-Julia 理论为基础，重点介绍 80 年代以来这一学科的卓越成就，其中包括有理函数动力系统、整函数和亚纯函数动力系统、函数族的随机迭代动力系统、代数函数和代数体函数的动力系统，以及多复变全纯映射的动力系统等研究成果. 本书介绍了这一学科的许多代表性成果，以及近年来我们在这方面的一系列工作. 当然，由于受我们学术水平和篇幅的限制，还有很多出色的结果没有引入.

本书共分 11 章，其中第一章是 Riemann 曲面上的解析动力系统，主要介绍双曲 Riemann 曲面上的解析动力学的局部迭代理论以及 Riemann 曲面的有关结论，它是后面内容的基础. 第二章到第七章讨论有理函数的动力学. 其中第二章是$\hat{\mathscr{C}}$上动力系统——Fatou-Julia 理论，主要介绍轨道、周期、Fatou 集、Julia 集的基本概念，以及 Fatou-Julia 理论的基本结果. 第三章是 Fatou 集的动力学性质，主要介绍 Fatou 分支的游荡性质、Sullivan 最终周期定理，以及周期分支的分类定理. 第四章是 Julia 集的动力学性质，主要介绍递归性质、扩张性质、Julia 集的测度及 Hausdorff 维数等. 第五章是有理函数的解析族和结构稳定性，主要介绍全纯运动、λ-引理、J-稳定性、结构稳定性和拟共形形变等. 第六章是多项式的动力学，主要介绍填充 Julia 集、势函数与外射线、Julia 集的局部连通性、Mandelbrot 集、Ecalle 圆柱，以及填充 Julia 集对参数的连续性等. 第七章是类多项式与拟共形手术，主要介绍类多项式、整理定理、有理函数的拟共形手术、拟共形手术的应用，以及耦合等. 第八章是整函数和亚纯函数的动力学，主要介绍整函数动力学的基本性质、Fatou 分支的性质、游荡域的存在性、Julia 集的分布、有限型整函数以及指数函数的动力学等. 第九章是函数族的随机迭代动力系统，主要介绍由有限多个或无穷多个有理函数、整函数或亚纯函数所生成的随机动力学的定义，Fatou 分支的游荡性质以及 Julia 集的基本性质. 第十章是代数函数与代数体函数的迭代，主要介绍代数函数及代数体函数的迭代定义、分类定理、Fatou 集和 Julia 集的典型性质等. 第十

一章是多复变量全纯映射的动力学，主要介绍$\mathscr{C}^N$上全纯自映射的迭代、Denjoy-Wolff 定理以及随机迭代等.

本书的第一、第三—第五章由邱维元撰写，第二章由邱维元和周维民撰写，第六、第七章由尹永成撰写，第八、第十章由乔建永撰写，第九章由乔建永、周维民和龚志民撰写，第十一章由张文俊撰写.

本书可作为研究生和高年级学生选修课的教材，也可作为教师和科技人员的参考书.

任福尧

1996 年 10 月于上海

符号说明

$\mathscr{C}$ 是 C 的草体，表示复数平面；$\hat{\mathscr{C}}$表示复球面.(p.1)

$\mathscr{R}$ 是 R 的草体，表示实数的全体.(p.2)

$\mathscr{Z}$ 是 Z 的草体，表示整数的全体.(p.4)

$\mathscr{N}$ 是 N 的草体，表示自然数的全体.(p.39)

$\mathscr{Q}$ 是 Q 的草体，表示有理数的全体.(p.45)

$\mathscr{G}$ 是 G 的草体，表示一族函数.(p.106)

$\forall$ 表示对任意给定的.(p.8)

$\exists$ 表示存在.(p.331)

每条说明后面的页码，表示该条所说明的字母第一次在书中出现的页码数.

目　录

第一章　Riemann 曲面上的解析动力系统

设 f 是定义域 S 到其自身的解析映射,这里 S 可以是复平面 $\mathscr{C}$ 内的区域、复平面 $\mathscr{C}$ 本身、Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}} = \mathscr{C} \cup \{\infty\}$ 或一般的一个 Riemann 曲面. 对任意初值 $z_0 \in S$, 考虑迭代过程 $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, $\cdots$, $z_n = f(z_{n-1})$, $\cdots$. 称迭代序列 $\{z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\}$ 为点 z_0(在 f 作用下)的轨道,记为 $O_f(z_0)$. 也可以这样定义:记 $f^0 = id$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f^1$, $\cdots$, $f^n = f \circ f^{n-1}$, $\cdots$. 这里记号 $\circ$ 表示函数复合,那么对于初值 $z_0 \in S$, $z_n = f^n(z_0)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 复解析动力系统即要研究函数迭代序列 $\{f^n\}$ 或轨道 $O_f(z_0)$ 的状态,主要考虑下面几个问题:对给定解析自映射 f 及初值 z_0,其轨道的极限状态;关于初值 z_0 的稳定性;及关于函数 f 的稳定性等.

对于大多数 Riemann 曲面,其上的解析动力系统是简单的,不会产生混沌现象,而对于某些 Riemann 曲面如 $\mathscr{C}$, $\hat{\mathscr{C}}$ 等,其上的动力系统非常复杂. 本章将主要讨论简单的情形,即双曲 Riemann 曲面上的解析动力学,此时可以给出一个较完全的描述.

§1.1　Riemann 曲面基础

本节先简单地介绍一下 Riemann 曲面的有关知识,详细论述参看文献[AS, FK].

§1.1.1　Riemann 曲面的分类

回忆 Riemann 曲面的一些基本概念. 一个 Riemann 曲面是一个曲面 S 带有一个复结构 σ_0,即有一个局部坐标图册,使得坐标变换是解

析的.以后,我们给定一个 Riemann 曲面总假定给定了它的一个复结构,这个复结构就称为标准复结构,用 σ_0 表示.

设 S_1 与 S_2 是两个 Riemann 曲面,$f: S_1 \mapsto S_2$ 称为是解析的,如果 f 在其局部坐标表示下是解析的.如果存在同胚 $h: S_1 \mapsto S_2$ 使得 h 及其逆 h^{-1} 都是解析的,则称 h 是 S_1 与 S_2 之间的共形同构,共形同构的 Riemann 曲面被认为是相同的.

设 $f_1: S_1 \mapsto S_1$ 是解析自映射,定义 $f_2 = h \circ f_1 \circ h^{-1}$,则 $f_2: S_2 \mapsto S_2$ 也是解析自映射,且 $f_2^n = h \circ f_1^n \circ h^{-1}$, $n = 1, 2, \cdots$. 因此,f_1 与 f_2 具有相同的解析动力学性质,称 f_1 与 f_2 是共形共轭的,而 h 称为(f_1 与 f_2 之间的)共形共轭映射.

经典复分析的一个中心结论是下面的单值化定理.

定理 1.1(单值化定理) 任何单连通 Riemann 曲面共形等价于下列三种标准的 Riemann 曲面之一:

1) Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}} = \mathscr{C} \cup \{\infty\}$;

2) 复平面 $\mathscr{C}$;

3) 单位圆盘 $\Delta = \{z \in \mathscr{C} \mid |z| < 1\}$ (或上半平面 $H = \{z \in \mathscr{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$).

单值化定理的证明非常复杂,可参看文献[AS, FK].

Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}}$ 是一个紧的 Riemann 曲面,其复结构可如下确定:$\hat{\mathscr{C}}$ 的局部坐标邻域可取为 $\mathscr{C}$ 和 $\hat{\mathscr{C}} \backslash \{0\}$,在 $\mathscr{C}$ 上用通常的自然坐标 z 作为单值化参数,在 $\hat{\mathscr{C}} \backslash \{0\}$ 用 $\zeta = \dfrac{1}{z}$ 作为单值化参数.通过球极投影,$\hat{\mathscr{C}}$ 同胚于 $\mathscr{R}^3$ 中的单位球面.

单位圆盘 Δ 与上半平面 H 是共形等价的.共形同构为 $h: z \mapsto \dfrac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}$,我们将按需要选取 Δ 或 H 作为标准 Riemann 曲面.

对于一般的 Riemann 曲面 S,其万有覆盖曲面 $\widetilde{S}$ 是单连通的 Riemann 曲面,记 $\pi: \widetilde{S} \mapsto S$ 是覆盖映射,它是局部共形映射.由单值化定理,$\widetilde{S}$ 共形等价于 $\hat{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$ 或 Δ 之一.

定义 1.1 设 S 是 Riemann 曲面，$\widetilde{S}$是其万有覆盖曲面，$\pi: \widetilde{S} \mapsto S$ 是覆盖映射，则

1）如果$\widetilde{S}$共形等价于$\hat{\mathscr{C}}$，称 S 是椭圆的 Riemann 曲面；

2）如果$\widetilde{S}$共形等价于$\mathscr{C}$，称 S 是抛物的 Riemann 曲面；

3）如果$\widetilde{S}$共形等价于 Δ（或 H），称 S 是双曲的 Riemann 曲面.

以后，我们就取 $\widetilde{S}=\hat{\mathscr{C}}$，$\mathscr{C}$或 Δ（或 H）作为 S 的万有覆盖曲面.

对于 S 的万有覆盖曲面$\widetilde{S}$，$\pi: \widetilde{S} \mapsto S$，$\widetilde{S}$ 上的共形自同构 $\gamma: \widetilde{S} \mapsto \widetilde{S}$ 如果满足 $\pi \circ \gamma=\pi$，则称为覆盖变换. 覆盖变换全体构成$\widetilde{S}$上共形自同构群 $G(\widetilde{S})$的子群，称为覆盖变换群，记为 Γ. 由于对任意 $x \in S$，纤维 $\pi^{-1}(x)$是离散的，容易看出，作为拓扑群，Γ 是离散群，即对任意 $\gamma_n \in \Gamma$，$\gamma_n \mapsto \gamma_0 (n \rightarrow \infty)$，均有当 n 充分大时，$\gamma_n \equiv \gamma_0$. 其次，若 $\gamma \in \Gamma$ 不是恒等元素，那么，γ 在$\widetilde{S}$内没有不动点.

在$\widetilde{S}$上有下述等价关系 $\sim$ ：$x, y \in \widetilde{S}$，$x \sim y$ 当且仅当存在 $\gamma \in \Gamma$，使得 $\gamma(x)=y$. $\widetilde{S}$在此等价关系下的商空间记为$\widetilde{S}/\Gamma$，它是一个 Riemann 曲面，具有诱导复结构. 注意到 $x \sim y$ 当且仅当 $\pi(x)=\pi(y)$，我们有：$\widetilde{S}/\Gamma$ 共形等价于 Riemann 曲面 S.

下面我们分别对 $\widetilde{S}=\hat{\mathscr{C}}, \mathscr{C}$，与 H，讨论其上的共形自同构群 $G(\widetilde{S})$和覆盖变换群 Γ.

对椭圆情形，容易证明：任意 $\gamma \in G(\hat{\mathscr{C}})$ 是一个分式线性变换

$$\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

其中，$a, b, c, d \in \mathscr{C}$，$ad-bc \neq 0$，称为 Möbius 变换. 反之亦然. 在规范化条件 $ad-bc=1$ 下，$\gamma \in G(\hat{\mathscr{C}})$ 由其系数唯一确定. 因此 $G(\hat{\mathscr{C}})$同构于复二阶矩阵（行列式等于 1）构成的线性群 $PSL(2,\mathscr{C})/\{\pm I\}$. $G(\hat{\mathscr{C}})$中的每个非恒等元素或者有两个不同的不动点，或者有一个重

不动点. 因此,如果 S 是一个椭圆 Riemann 曲面,那么对应的覆盖变换群 Γ 只能含有恒等元素,即 $\Gamma=\{id\}$. 于是 S 共形等价于 $\hat{\mathscr{C}}/\Gamma=\hat{\mathscr{C}}$. 故椭圆 Riemann 曲面只有一个,即 Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}}$.

对抛物情形,这时 $G(\mathscr{C})$ 中每个元素是一个平面仿射变换 $\gamma(z)=\lambda z+c$, $\lambda\neq 0$, $G(\mathscr{C})$ 为 $\mathscr{C}$ 上的仿射变换群. 当 $\lambda\neq 1$ 时, γ 一定有一个有限不动点,故 γ 要属于某个抛物 Riemann 曲面 S 的覆盖变换群 Γ, 只能有形式 $\gamma(z)=z+c$. 又由于 Γ 是离散群,因此,仅有下面三种情形:

Γ 是单位群,即 $\Gamma=\{id\}$. 这时 S 共形等价于 $\mathscr{C}$;

Γ 有一个生成元,即 $\Gamma=\langle z+c\rangle(c\neq 0)$, 这时 Γ 同构于整数群 $\mathscr{Z}$. 因此 $S=\mathscr{C}/\mathscr{Z}$, 或者说,在指数映射下, S 共形等价于穿孔复平面 $\mathscr{C}^*=\mathscr{C}\setminus\{0\}$;

Γ 有两个生成元,即 $\Gamma=\langle z+\omega_1, z+\omega_2\rangle$, 这里 $\omega_1/\omega_2\notin\mathscr{R}$, Γ 同构于由复数 ω_1, ω_2 生成的格点群 Λ. 因此 S 共形等价于环面 $\mathscr{C}/\Lambda=T$. 称 ω_1/ω_2 为 T 的复模.

因此,抛物 Riemann 曲面仅可能为复平面 $\mathscr{C}$, 穿孔复平面 $\mathscr{C}^*$ 或环面 T 之一.

对双曲情形,所有其他 Riemann 曲面都是双曲的,以上半平面 H (或单位圆盘 Δ)为万有覆盖曲面,对于任意 $\gamma\in G(H)$ 可以通过对称开拓为 $\hat{\mathscr{C}}$ 上共形自同构,故 $G(H)$ 是 $G(\hat{\mathscr{C}})$ 中保持上半平面不变的 Möbius 变换组成的子群. 每个 $\gamma\in G(H)$ 有形式 $\gamma(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, 这里 $a, b, c, d\in\mathscr{R}$, 且 $ad-bc>0$, 在规范化条件 $ad-bc=1$ 下, $G(H)$ 同构于 $PSL(2,\mathscr{R})/\{\pm I\}$. 如果 S 是双曲 Riemann 曲面,则 S 共形等价于某个 H/Γ, 这里 Γ 是 $G(H)$ 的离散子群,且除恒等元素外在 H 内没有不动点. 称 $G(H)$ 中的离散子群为 Fuchs 群.

注 $G(\Delta)$ 中的元素 γ 具有如下形式: $\gamma(z)=e^{2\pi i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, 其中 $\theta\in[0,1)$, $a\in\Delta$.

综上所述,我们有下述定理.

定理 1.2 任何 Riemann 曲面共形等价于下述曲面之一:1) $\hat{\mathscr{C}}$; 2) $\mathscr{C}$; 3) $\mathscr{C}^*$; 4) 环面 T; 5) H/Γ. 这里 Γ 是 Fuchs 群,除恒等元素外在 H 内没有不动点.

$G(H)$中的元素可由 $\partial H = \mathscr{R} \cup \{\infty\}$ 给定三点的值唯一确定. 如保持 0, 1, ∞不变的元素只能是恒等元素,对于非恒等元素 $\gamma \in G(H)$, 可以分为三类:

如果 γ 有两个不同的实不动点,则称 γ 为双曲的. 可以通过 H 上的共形变换将两个不动点映成 0 和∞. 这时,γ 共形共轭于变换 $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. 如有必要,通过变换 $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ 可使 $\lambda > 1$.

如果 $\gamma \in G(H)$ 仅有一个重不动点,则称 γ 是抛物的. 这时该不动点一定是实的,将其映成∞, γ 共形共轭于 $z \mapsto z + c$, $c \in \mathscr{R}$, $c \neq 0$, 可规范化为 $c = 1$.

如果 $\gamma \in G(H)$ 有一对共轭复不动点,则称 γ 是椭圆的. 这时有一个不动点 $\omega_0 \in H$. 通过共形变换将 H 映成单位圆盘 Δ,将 ω_0 映成 0, 则 γ 共形共轭于 $z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$, $\theta \in [0, 1)$, 为一旋转.

显然,覆盖变换群不能有椭圆元素,当 γ 为双曲或抛物元素时,γ 生成的无限循环群$\langle\gamma\rangle$是离散群,如果 γ 是双曲的,则 $H/\langle\gamma\rangle$共形等价于圆环 $A_r = \{z \mid \gamma < |z| < 1\}$; 如果 γ 是抛物的,则 $H/\langle\gamma\rangle$共形等价于穿孔圆盘 $\Delta^* = \Delta\setminus\{0\}$. Δ, Δ^* 及 A_γ 称为初等 Riemann 曲面.

§ 1.1.2 Riemann 曲面的度量

下面我们在 Riemann 曲面上引进度量(距离). 先讨论单连通情形:$\hat{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$与 Δ 上的度量.

对于复平面$\mathscr{C}$,其上有自然的 Euclid 度量 $ds = |dz|$,或 Euclid 距离 $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, z_1, $z_2 \in \mathscr{C}$, 这是熟知的.

考虑 Riemann 球面$\hat{\mathscr{C}}$,$\hat{\mathscr{C}}$同胚于 $\mathscr{R}^3$ 中单位球面 S^2,在 S^2 上有自然的度量,即大圆弧的弧长,通过球极投影到坐标平面上,我们在$\hat{\mathscr{C}}$上

有 Riemann 度量：

$$ds = \frac{2|dz|}{1+|z|^2},$$

称为球面度量. 它在坐标变换 $z \mapsto \frac{1}{z}$ 下保持不变. 这是一个光滑的度量，具有常 Gauss 曲率 $+1$，其测地线对应于 S^2 中的大圆弧. 在球面度量下，$\hat{\mathscr{C}}$ 内任意两点的距离小于等于 π. 对应的球面距离用 d_S 表示，简记为 d.

下面考虑单位圆盘 Δ. 在 Δ 上，我们有经典的 Schwartz 引理：若 $f: \Delta \mapsto \Delta$ 解析，$f(0)=0$，则对任意 $z \in \Delta$，$|f(z)| \leqslant |z|$，且等号对非零 z 成立的充要条件是 $f(z) = e^{2\pi i\theta}z$，$\theta \in [0,1)$. 一般地，对 $f: \Delta \mapsto \Delta$ 解析，我们有

$$\frac{|f(w)-f(z)|}{|1-\overline{f(w)}f(z)|} \leqslant \frac{|w-z|}{|1-\overline{w}z|},\ z,\ w \in \Delta,$$

等号成立当且仅当 f 是 Δ 上的共形自同构. 让 $w \mapsto z$，则有 Schwartz 引理的度量形式：

$$\frac{|df(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{|dz|}{1-|z|^2},\ z \in \Delta,$$

且等号成立当且仅当 f 是 Δ 上共形自同构.

在 Δ 上引进双曲度量(Poincaré 度量)ω 如下：

$$\omega(z) = ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

由 Schwartz 引理，它是在 Δ 上的共形自同构作用下保持不变的 Riemann 度量，而在其他解析自映射作用下严格减小的双曲度量. 双曲度量也是光滑度量，具有常 Gauss 曲率 -1. 测地线是正交于单位圆周的圆弧(或直径)，对应的距离称为双曲距离，记为 ρ_Δ. 容易计算，0 到 $z \in \Delta$ 的双曲距离为

$$\rho_\Delta(0,\ z) = \log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

利用共形不变性，可以计算出任意两点间的距离．由此我们可得如下性质．

性质 1.1 Δ 在双曲度量下是完备的，即任意 Gandry 序列是收敛的．

性质 1.2 对 $z_0 \in \Delta$，闭双曲邻域 $B_r(z_0, \omega) = \{z \in \Delta \mid \rho_\Delta(z, z_0) \leqslant r\}$ 是 Δ 内的紧集．

性质 1.3 任一连接 $z_0 \in \Delta$ 和 $\partial\Delta$ 上一点的弧具有无穷的双曲长度．

对于一般的双曲 Riemann 曲面 S，Δ 是其万有覆盖曲面，$\pi: \Delta \mapsto S$ 是覆盖映射．注意到 Δ 上的双曲度量在覆盖变换群 $\Gamma \subset G(\Delta)$ 作用下是不变的，我们可以通过 π 诱导 S 上的双曲度量 ω，使得 π 成为 Δ 到 S 的等距同构．可用单值化参数表示如下．若 ω 是 S 的单值化参数，$\omega = \pi(z)$，则 S 上双曲度量 ω 有下面形式：

$$\omega(w) = \lambda(w)\,|dw|,$$

其中，$\lambda(w)$满足：

$$\lambda(\pi(z))\,|\pi'(z)| = \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

这样，ω 仍为具有常曲率 -1 的 Riemann 度量，并且具有 Δ 上双曲度量所具有的性质．S 上双曲距离记为 ρ_S，简记为 ρ．

注 上半平面 H 上的双曲度量在其自然参数下为

$$\omega = \omega(z) = \frac{|\mathrm{d}z|}{|\mathrm{Im}z|}.$$

对应于 Δ 上的 Schwartz 引理，我们有 Riemann 曲面上的广义的 Schwartz 引理．

定理 1.3 设 S_1，S_2 为两个双曲 Riemann 曲面，ω_1，ω_2 分别为其上的双曲度量，$f: S_1 \mapsto S_2$ 是解析映射，则有

$$\omega_2(f(z)) \leqslant \omega_1(z), \quad z \in S_1,$$

等号对某个 $z \in S$ 成立当且仅当 f 是 S_1 到 S_2 上的覆盖映射．

证明 考虑万有覆盖 $\pi_1: \Delta \mapsto S_1$，$\pi_2: \Delta \mapsto S_2$，则有下列交换图：

$$
\begin{array}{ccc}
\Delta & \xrightarrow{F} & \Delta \\
\downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\
S_1 & \xrightarrow{f} & S_2
\end{array}
$$

其中，F 是 f 的提升，由于 π_1，π_2 是等距同构，利用 Δ 上经典的 Schwartz 引理即得所求不等式，而等号成立当且仅当 F 是共形自同构，从而 f 是局部共形的等距映射，因此是覆盖映射. 证毕.

写成距离形式，我们有下面的推论.

推论 1.1 设 $f: S_1 \mapsto S_2$ 解析，则对任意 z_1，$z_2 \in S_1$，有

$$\rho_{S_2}(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \rho_{S_1}(z_1, z_2),$$

等号对某个 $z_1 \neq z_2$ 成立当且仅当 f 是覆盖映射.

定理 1.3 和推论 1.1 表明，解析映射 $f: S_1 \mapsto S_2$，或者是严格减小的双曲度量：$\rho_{S_2}(f(z_1), f(z_2)) < \rho_{S_1}(z_1, z_2)$ $(z_1 \neq z_2)$，或者是保持双曲度量不变：$\rho_{S_2}(f(z_1), f(z_2)) \equiv \rho_{S_1}(z_1, z_2)$ $(\forall\ z_1, z_2 \in S)$. 此时，$f$ 是覆盖映射.

推论 1.2 如果 $S_1 \subset S_2$，那么对任意 $z \in S_1$，$\omega_1(z) \geqslant \omega_2(z)$.

证明 利用定理 1.3 于恒等映射 $id: S_1 \mapsto S_2$ 即得. 证毕.

§1.2 双曲 Riemann 曲面上的解析动力系统

现在讨论双曲 Riemann 曲面上的解析动力系统. 设 S 是 Riemann 曲面，$f: S \mapsto S$ 是解析自映射，考虑 f 的迭代序列：$f^0 = id$，$f^1 = f$，$\cdots$，$f^n = f \circ f^{n-1}$，$\cdots$. 对 $z \in S$，定义 $z_n = f^n(z)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，称序列 $\{z_n\}$ 为 f 在点 z 的轨道，记为 $O_f(z)$ 或简记为 $O(z)$.

如果 $z_0 \in S$ 是 f 的不动点，即 $f(z_0) = z_0$，则称 $\lambda = f'(z_0)$ 为不动点 z_0 的乘子. 如果 $|\lambda| < 1$，则称 z_0 是 f 的吸引不动点.

注 这里的导数应在单值化参数下求得，但在不动点处导数与参数选取无关，因而乘子与参数的选取无关. 下面，我们不区分 Riemann 曲面上的几何点与其参数表示.

现设 S 是双曲 Riemann 曲面，ρ 是其上的双曲距离.

引理 1.1 如果 $f: S \mapsto S$ 为严格减小双曲度量，那么，下列两者之一成立：

1) 对任意 $z \in S$，$f^n(z)$ 在双曲度量下趋向于∞，即对任意固定的 $a \in S$，$\rho(a, f^n(z)) \to \infty \ (n \to \infty)$；

2) 对任意 $z \in S$，$f^n(z)$ 局部一致收敛于唯一的吸引不动点 $z_0 \in S$.

证明 如果 1)不成立，则存在 $z \in S$ 及序列 $n_j \to \infty (j \to \infty)$ 使得 $\rho(a, f^{n_j}(z))$有界，由于双曲度量是完备的，因此存在子列，不妨仍记为 n_j，使得 $f^{n_j}(z) \to z_0 \in S \ (j \to \infty)$.

首先证明 z_0 是 f 的吸引不动点. 事实上，由于 f 是严格减小双曲度量，而$\{f^{n_j}(z)\}$位于 S 的某个紧子集内，因此存在 $k \in (0, 1)$，使得

$$\begin{aligned}(f^{n_j+1}(z), f^{n_j}(z)) &\leqslant k\rho(f^{n_j}(z), f^{n_j-1}(z)) \\ &< k\rho(f^{n_{j-1}+1}(z), f^{n_{j-1}}(z)) \\ &\cdots\cdots \\ &\leqslant k^{j-1}\rho(f(z), z).\end{aligned}$$

令 $j \mapsto \infty$，得 $\rho(f(z_0), z_0) = 0$，即 z_0 为不动点. 再利用 Schwartz 引理，我们有

$$\lambda(f(z_0))|f'(z_0)||dz| < \lambda(z_0)|dz|.$$

由 $f(z_0) = z_0$ 即得 $|f'(z_0)| < 1$，故 z_0 是吸引不动点.

其次证明，对任意 $z' \in S$，$f^n(z') \to z \ (n \to \infty)$，因

$$\rho(f^n(z'), z_0) = \rho(f^n(z'), f^n(z_0)) < \rho(z', z_0),$$

故$\{f^n(z')\}$也位于 S 内的一个紧子集内，且存在 $k' \in (0, 1)$，使得

$$\begin{aligned}\rho(f^n(z'), z_0) &= \rho(f^n(z'), f^n(z_0)) \\ &\leqslant k'\rho(f^{n-1}(z'), f^{n-1}(z_0)) \\ &\leqslant \cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\leqslant k'^n \rho(z', z_0).$$

令 $n \to \infty$，即得 $\rho(f^n(z'), z_0) \to 0$. 显然收敛是局部一致的. 这就证明了 2). 证毕.

引理 1.2 设 $f: S \mapsto S$ 保持双曲度量不变，那么，下列两者之一成立：

1) 同引理 1.1 的 1)；

2) f 是 S 上的共形自同构，且存在迭代子列 f^{n_j} 在任一紧子集上一致收敛于恒等映射.

证明 如果 1)不成立，那么，存在 $z_0 \in S$ 及 $n_j \to \infty$，使得 $z_{n_j} = f^{n_j}(z_0) \to \hat{z} \in S$，设 $\pi: \Delta \mapsto S$ 是 S 的万有覆盖，$\hat{z}_{n_j}$ 与 $\tilde{z}$ 分别是 z_{n_j} 与 $\hat{z}$ 的上方点，使得 $\widetilde{z_{n_j}} \to \tilde{z}$ $(j \to \infty)$. 考虑序列 $g_j = f^{(n_{j+1}-n_j)}$，那么，$g_j(z_{n_j}) = z_{n_{j+1}}$. 记 $\tilde{g}_j$ 为 g_j 的提升，使得 $\tilde{g}_j(\widetilde{z_{n_j}}) = \tilde{z}_{n_{j+1}}$，那么 $\tilde{g}_j$ 是 Δ 到自身的解析映射. $\{\tilde{g}_j\}$ 有收敛子列，收敛于 Δ 内解析映射 $\tilde{h}: \Delta \mapsto \Delta$，且 $\tilde{h}(\tilde{z}) = \tilde{z} \in \Delta$. 由于 $\tilde{g}_j$ 保持双曲度量不变，$\tilde{h}$ 也保持双曲度量不变，由 Δ 上的 Schwartz 引理知，$\tilde{h}$ 是 Δ 上以 $\tilde{z}$ 为中心的旋转，即在一个将 $\tilde{z}$ 映成原点 O 的共形自同构下，$\tilde{h}$ 共形共轭于 $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$: 如果 θ 是有理数，那么 $\tilde{h}$ 是有限价的，即存在 n，$\tilde{h}^n = id$；如果 θ 是无理数，则存在 m_j，$m_j\theta \to 0 (j \to \infty)$，因此迭代子序列 $\tilde{h}^{m_j}$ 收敛于恒等映射 id. 由对角线法则，$\tilde{g}_j^{m_j} \to id (j \to \infty)$，但 $\tilde{g}_j^{m_j}$ 必为 $\tilde{g}_j^{m_j}$ 的某个提升，因而为某个 f^{l_j} 的提升 $\tilde{f}^{l_j}$，于是，$\tilde{f}^{l_j} \to id (j \to \infty)$，这样 f^{l_j} 在 S 上收敛于 id. 所以，f 一定是一对一的. 事实上，若有 z, z'，使得 $f(z) = f(z')$，那么 $f^{l_j}(z) = f^{l_j}(z')$，令 $j \to \infty$ 即得 $z = z'$，又显然 f 是到上的，因此 f 是 S 的共形自同构，2)得证. 证毕.

引理 1.3 设 $f: S \mapsto S$ 满足引理 1.2 中的 2)，那么，下列两者之一成立：

1) f 是有限价的，即存在 n；$f^n = id$；

2) S 共形等价于单位圆盘 Δ，或穿孔单位圆盘 $\Delta^* = \Delta \backslash \{0\}$，或圆

环 $A_r = \{z \mid r < |z| < 1\}$. 而 f 共形共轭于一个无理旋转:$z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$, θ 为无理数.

在证明该引理之前,先证明下面的引理.

引理 1.4 设 $g, h \in G(\hat{\mathscr{C}})$ 为两个非恒等的 Möbius 变换,如果 $g \circ h = h \circ g$, 那么,除了 $g^2 = h^2 = id$ 以外 g 与 h 有相同的不动点.

证明 $g \circ h = h \circ g$ 意味着 g 将 h 的不动点映成 h 的不动点,h 将 g 的不动点映成 g 的不动点,若 h 只有一个不动点 z,那么 g 也只有一个相同的不动点 z. 事实上,由 $g(z) = g \circ h(z) = h \circ g(z)$, $g(z)$ 是 h 的不动点,而 h 只有一个不动点,只能有 $g(z) = z$, 若 g 还有不动点 z', 则 $g \circ h(z') = h \circ g(z') = h(z')$. 这样,或者 $h(z') = z$, 或者 $h(z') = z'$, 两者都导出 $z' = z$. 若 h 有两个不动点,那么 g 也有两个不动点,所以,或者 g 与 h 有相同的不动点,或者 g 将 h 的一个不动点映成另一个,这时,g^2 有四个不动点,故 $g^2 = id$. h 的情形类似. 引理证毕.

现在来证明引理 1.3.

证明 以上半平面 H 为 S 的万有覆盖曲面,Γ 为覆盖变换群, $\Gamma \subset G(H)$. 设 $f^{n_j} \to id(n_j \to \infty)$, 如果有某个 $n = n_j$, 使 $f^n = id$, 那么 f 是有限价的. 即为 1). 否则,对任意 n_j, $f^{n_j} \neq id$. 设 $\widetilde{f}_j$ 是 f^{n_j} 在 H 上的提升,使得 $\widetilde{f}_j \to id(j \to \infty)$, 由 f 是 S 的共形自同构可知, $\widetilde{f}_j \in G(H)$, 且 $\widetilde{f}_j \neq id$.

若 $\Gamma \neq \{id\}$, 取定 $\gamma_0 \in \Gamma$, $\gamma_0 \neq id$, 由提升性质可知, $\widetilde{f}_j \circ \gamma_0 \circ \widetilde{f}_j^{-1} \in \Gamma$, 令 $j \to \infty$, 则 $\widetilde{f}_j \circ \gamma_0 \circ \widetilde{f}_j^{-1} \mapsto \gamma_0$, 但 Γ 是离散群,因此,存在 j_0, 当 $j \geqslant j_0$ 时, $\widetilde{f}_j \circ \gamma_0 \circ \widetilde{f}_j^{-1} = \gamma_0$, 也即 $\widetilde{f}_j$ 与 γ_0 可交换. 由引理 1.4 得知, $\widetilde{f}_j$ 与 γ_0 有相同的不动点,因而导出对任意 $j \geqslant j_0$, $\widetilde{f}_j$ 都有相同的不动点. 由于 $\gamma_0 \in \Gamma$ 是任意取定的非恒等元素,故得到对任意 $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq id$, γ 与 $\widetilde{f}_j$ 有相同的不动点(j 充分大),也即对一切 $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq id$, 都有相同的不动点. 因此,我们得到,或者 $\Gamma = \{id\}$, 或者 Γ 是一个无限循环群.

如果 $\Gamma = \{id\}$，那么 $S = H/\Gamma = H$. 由于 $f^{n_j} \to id(j \to \infty)$，$f$ 是 H 上的共形自同构，即 $f \in G(H)$，且 f 一定是椭圆元素，因此，S 共形等价于 Δ，而 f 共形共轭于 Δ 上的旋转 $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$，由 $f^n \neq id$，θ 必为无理数.

如果 Γ 中的元素只有一个公共不动点，那么，Γ 中非恒等元素都是抛物元素. 若将这个公共不动点映成∞，Γ 中元素都有形式 $z \mapsto z + c$，$c \in \mathscr{R}$，又由 Γ 是离散群，可取到最小的正数 c_0，Γ 中元素都可由 $\gamma_0(z) = z + c_0$ 生成，所以，$S = H/\langle\gamma_0\rangle$ 共形等价于穿孔单位圆盘 Δ^*，f 共形共轭于 Δ^* 上共形自同构，扩充到 Δ 上后以 0 为不动点，故为 Δ^* 上一个旋转；同样为无理旋转.

如果 Γ 中元素都有两个不动点，由于 Γ 是覆盖变换，那么它们都是双曲元素. 同样，由于 Γ 是离散群，Γ 由一个双曲元素 γ_0 生成，因此 $S = H/\langle\gamma_0\rangle$ 为圆环 A_r，f 共形共轭于 A_r 上的共形自同构，由对称原理可知，它可扩充为 Δ^* 上共形自同构，因而为一旋转，且为无理旋转. 这就得到了 2). 证毕.

综合前面的引理 1.1 到引理 1.3，我们有下述定理.

定理 1.4 设 S 是一个双曲 Riemann 曲面，$f: S \mapsto S$ 是解析自映射，那么，下列情形之一成立：

1) 对任意 $z \in S$，$f^n(z)$ 在双曲度量下趋向于 $\infty(n \to \infty)$；

2) 对任意 $z \in S$，$f^n(z)$ 局部一致收敛于 f 的唯一的吸引不动点 $z_0 \in S(n \to \infty)$；

3) f 是有限价的，即存在 n，$f^n = id$；

4) S 共形等价于单位圆盘 Δ，或穿孔单位圆盘 Δ^* 或圆环 A_r，而 f 共形共轭于一个无理旋转 $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$，$\theta$ 为无理数.

证明 由定理 1.3(广义 Schwartz 引理)，只有引理 1.1 与引理1.2 两种情形，这两个引理中的情形 1)即为这里的 1)，引理 1.1 中的情形 2)即为这里的情形 2)，而引理 1.2 中的情形 2)可分成引理 1.3 中的 1)和 2)，其中引理 1.3 中的 1)即为这里的 3)，引理 1.3 中的 2)即为这里的 4). 证毕.

定理 1.4 给出了双曲 Riemann 曲面上解析自映射的动力系统的

完全描述，它给出了 f 的轨道的极限状态，在情形 3)和 4)还给出了具体描述，而且，轨道的极限不依赖于初值的选取，即关于初值是稳定的.

§1.3 双曲区域上的解析动力系统

现在我们将 Riemann 曲面 S 限定为 Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}}$ 上的一个区域 D，D 称为双曲区域，如果它作为 Riemann 曲面是双曲的. 已知 $\hat{\mathscr{C}}$ 挖去一点等价于复平面 $\mathscr{C}$，挖去两点等价于穿孔复平面 $\mathscr{C}^*$，它们都是抛物 Riemann 曲面，因此，D 成为双曲区域其边界点至少有三点，并且，边界点至少为三点的区域 $D \subset \hat{\mathscr{C}}$ 都是双曲区域. 特别地，如果 a_1, a_2, a_3 是 $\hat{\mathscr{C}}$ 内三个不同点，那么 $\Sigma_3 = \hat{\mathscr{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ 是双曲区域，称为三穿孔球面，它是最大的双曲区域，标准化的三穿孔球面可取为 $\Sigma_3 = \hat{\mathscr{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathscr{C} \setminus \{0, 1\}$.

设 D 为双曲区域，作为 $\hat{\mathscr{C}}$ 的子集，D 有自然的参数 z(事实上 D 可作为 $\mathscr{C}$ 的子集，只要规定 $\infty \notin D$). 另外，D 除了有双曲度量外，还有球面度量.

容易看出，在 D 内的紧子集上，双曲度量等价于球面度量，也等价于 Euclid 度量. 这里，两个度量 ω_1 与 ω_2 等价，如果存在常数 c_1, c_2，使得 $c_1\omega_2 \leqslant \omega_1 \leqslant c_2\omega_2$.

现设 f 是双曲区域 D 上的解析自映射，考虑其迭代 f^n，在定理1.4 的 1)中，对任意 $z \in D$，有 $\rho_D(f^n(z), a) \to \infty (n \to \infty)$，这里 $a \in D$ 是固定的一点，ρ_D 是双曲距离. 这意味着当 $n \to \infty$ 时，$f^n(z)$ 最终将离开 D 内任意给定的紧子集，故从点集的角度看，$f^n(z) \to \partial D (n \to \infty)$. 因此，我们有必要讨论 $f^n(z)$ 趋于 D 的边界时的极限状态.

引理 1.5 设 $U_r(z, \rho_D)$ 是 D 内以 z 为心、r 半径的双曲圆盘，即 $U_r(z, \rho_D) = \{\zeta \mid \rho(z,\zeta) < r\}$，那么，当 $z \to \partial D$ 时，$U_r(z, \rho_D)$ 的球面直径趋向于 0.

证明 先考虑三穿孔球面 $\Sigma_3 = \hat{\mathscr{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ 情形，z 趋向于 Σ_3

的三个边界点之一,例如 a_1. 设 $U_\varepsilon(a_j)$是 a_j 的球面度量下的 ε-邻域 $(j=1, 2, 3)$,那么,$K=\hat{\mathscr{C}}\setminus\bigcup_{j=1}^{3}U_\varepsilon(a_j)$ 是 Σ_3 内的紧子集,存在 $M>0$,对任意 $z_1, z_2\in K$, $\rho_{\Sigma_3}(z_1, z_2)<M<\infty$. 现在固定 $z_0\in K$,那么当 $z\to a_1$ 时,$\rho_{\Sigma_3}(z_0, z)\to\infty$. 对任意 $\zeta\in U_r(z, \rho_{\Sigma_3})$,由于 $\rho_{\Sigma_3}(z_0, \zeta)\geqslant\rho_{\Sigma_3}(z_0, z)-\rho_{\Sigma_3}(z, \zeta)\geqslant\rho_{\Sigma_3}(z_0, z)-r\to\infty\ (z\to a_1)$,因此,当 $z\to a_1$ 时,整个 $U_r(z, \rho_{\Sigma_3})$ 将位于 K 的外部. 又 $U_r(z, \rho_{\Sigma_3})$是连通的,故$U_r(z, \rho_{\Sigma_3})\subset U_\varepsilon(a_1)$,即$U_r(z, \rho_{\Sigma_3})$的球面直径小于 ε, 这就证明了 $U_r(z, \rho_{\Sigma_3})$的球面直径趋向于 0.

现设 D 是任一区域,边界至少有三点. 当 z 趋向于边界时,考虑序列 $z_j\to a_1\in\partial D$. 取 a_1, a_2, a_3 是 ∂D 上的三个不同点,那么 $D\subset\Sigma_3=\hat{\mathscr{C}}\setminus\{a_1, a_2, a_3\}$,由推论 1.2,$U_r(z, \rho_D)\subset U_r(z, \rho_{\Sigma_3})$,再由前面的讨论,即得 $U_r(z_j, \rho_D)$的球面直径趋向于 0,证毕.

由此引理,如果 $z_n\to\partial D$ 且 $\rho_0(z_n, z_n')<M<\infty$,那么 $d_S(z_n, z_n')\to 0(n\to\infty)$,故 $\{z_n'\}$ 与$\{z_n\}$在 ∂D 上有相同的聚点.

定义 1.2 $\hat{\mathscr{C}}$内的一个集合称为完全不连通的,如果它的每个连通分支是一个单点.

定理 1.5 设 D 是$\hat{\mathscr{C}}$内区域,边界至少有三点,$f: D\mapsto D$ 是解析映射,满足:

1) 对任意 $z\in D$, $f^n(z)\to\partial D\ (n\to\infty)$;

2) f 可连续到边界 ∂D 上;

3) f 在 ∂D 上的不动点集是完全不连通的,

那么,存在 f 的不动点 $z_0\in\partial D$,使得 $f^n(z)$在 D 内局部一致收敛于 $z_0(n\to\infty)$.

证明 考虑连接 D 内任意两点 z, ζ 的一条曲线 l_0,记 $l_n=f^n(l_0)$ 为连接 $f^n(z)$与 $f^n(\zeta)$的曲线,假设 l_0 在双曲度量下的直径为 δ,那么,由推论 1.1,l_n 在双曲度量下的直径不超过 δ,但 $l_n\to\partial D$, 由引理 1.5,l_n 的球面直径趋向于 $0\ (n\to\infty)$,特别地,$d_S(f^n(z), f^n(\zeta))\to 0(n\to\infty)$. 因此,$f^n(z)$与 $f^n(\zeta)$有相同的极限点. 若取 $\zeta=f(z)$,又得$f^n(z)$

的极限点集由 f 在 ∂D 上的不动点组成，考虑连续曲线 $L=\bigcup_{n=0}^{\infty} l_n$，那么 $f^n(L)$ 在 ∂D 上与 $f^n(z)$ 有相同的极限点集，且均由不动点组成. 另一方面，$f(L)\subset L$，容易验证，$f^n(L)$ 的极限点集是连通的，但由条件 3) 不动点集是完全不连通的，故极限点集只能包含单个 f 的不动点 z_0，因此，$f^n(z)\to z_0(n\to\infty)$. 从证明中可以看出，收敛是局部一致的. 证毕.

如果加上 f 在不动点 $z_0\in\partial D$ 处的解析条件，我们还可估计 f 在 z_0 的乘子.

引理 1.6 设 $f: D\mapsto D$ 是解析映射，f^n 在 D 内局部一致收敛于 $z_0\in\partial D$，又若 f 在 z_0 的邻域内解析，$f(z_0)=z_0$，那么，f 在 z_0 的乘子 $\lambda=f'(z_0)$ 满足 $|\lambda|<1$ 或 $\lambda=1$.

证明 不妨假定 $z_0=0$，这时 f 在 0 有展开式

$$f(z)=\lambda z+o(z)\quad (z\to 0).$$

由 $f^n(z)\to 0(n\to\infty)$ 即得 $|\lambda|\leqslant 1$. 下面证明，如果 $|\lambda|=1$，那么一定有 $\lambda=1$. 用反证法，设 $\lambda=e^{i\theta}, \theta\in(0, 2\pi)$, $\theta\neq 0$. 这时，f 在 0 的充分小邻域 $U=\{z\,|\,|z|<\varepsilon\}$ 内单叶，作坐标变换 $Z=\log z$，那么，U 提升为 Z 平面上某个左半平面 $P=\{Z=X+iY\,|\,X<X_0\}$ ($-X_0$ 充分大). 同时，f 可提升为定义在 P 上的函数 F，当 $\mathrm{Re}Z\to-\infty$ 时，有形式

$$F(Z)=Z+i\theta+o(1),\ \theta\in(0, 2\pi).$$

现在取 $z\in D\cap U$，对应于 $Z=X+iY\in P$，当 $-X_0$ 充分大时，由 $F(Z)$ 的展开式及 $F^n(Z)\to-\infty(n\to\infty)$ 可知，在 F 的迭代下，其像的虚部至少增加 $\frac{\theta}{2}$，设 L_0 是 P 内连接 Z_0 与 $F(Z_0)$ 的一线段，令 $L_n=F^n(L_0)$，$L=\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$，那么，$L$ 是一条位于 P 内，且其上任一点的虚部大于等于 Z_0 的虚部的 F-不变曲线. 记 V_0 为 P 内那些位于曲线 L 左边且其虚部大于 Z_0 的虚部的点组成的集合，那么，$F(V_0)\subset V_0$ 且 $F(V_0)\neq V_0$. 记 $V=\exp V_0\cup\{0\}$，则 V 是 0 的邻域，且 $f(V)\subset V$，$f(V)\neq V$

(见图 1.1). 由定理 1.3，f 为严格减小 V 的双曲度量，又 f 在 V 内有不动点 0，由引理 1.1，f^n 在 V 局部一致收敛于 f 的唯一吸引不动点 0，因此，f 在 0 的乘子 $|\lambda| < 1$，与假设 $|\lambda| = 1$ 矛盾. 证毕.

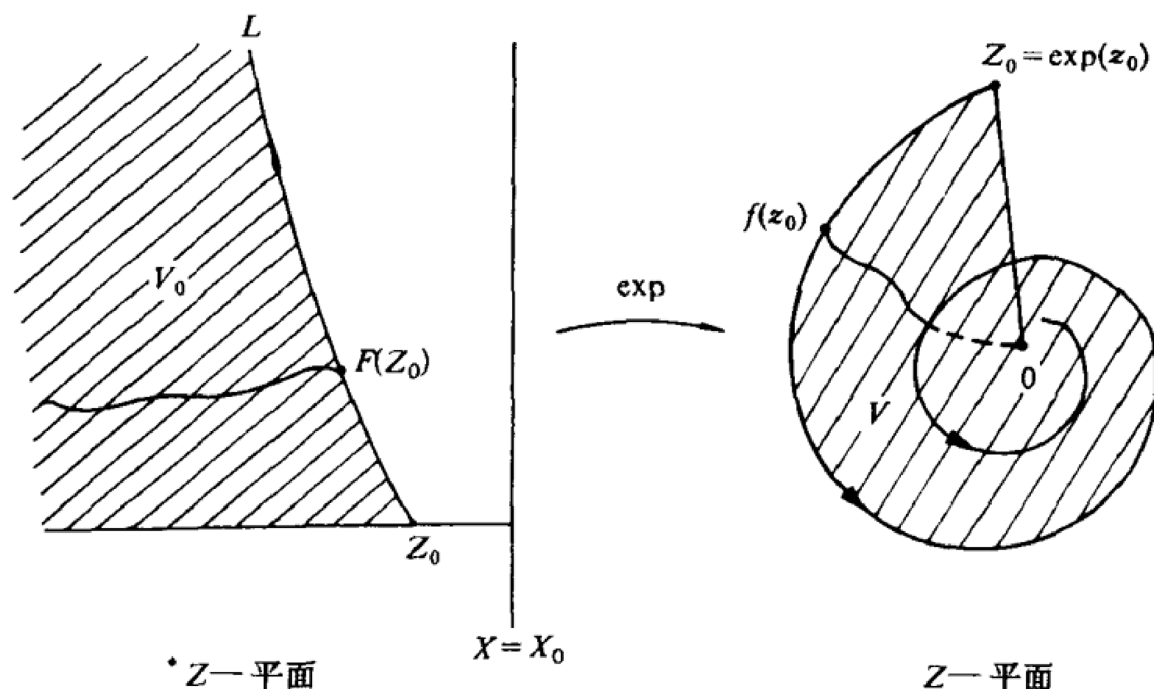


图 1.1 引理 1.6 的证明示意图

当区域 D 为单位圆盘 Δ 时，我们有著名的 Wolff-Denjoy 定理，这时，不要求 Δ 上自映射 f 连续到边界的条件.

定理 1.6(Wolff-Denjoy 定理) 设 $f: \Delta \mapsto \Delta$ 是解析映射，那么，下列两者之一成立：

1) f 是绕某个不动点 $z_0 \in \Delta$ 的旋转；

2) $f^n(z)$ 在 Δ 内局部一致收敛于某个 $z_0 \in \overline{\Delta}$.

(参见文献[Den, Mil]).

证明 由定理 1.4，我们只要证明当 $f^n(z) \to \partial\Delta$ 时，$f^n(z)$ 一定局部一致收敛于某个 $z_0 \in \partial\Delta$. 注意到在此时，f 在 Δ 内没有不动点. 设 $f_\varepsilon(z) = (1-\varepsilon)f(z)$，那么 $\overline{f(\Delta)} \subset \Delta$，因而，$f_\varepsilon$ 为严格减小双曲度量，且在 Δ 内有不动点 z_ε. 由于 f 在 Δ 内没有不动点，因此当 $\varepsilon \to 0$ 时，$z_\varepsilon \to \partial\Delta$. 记 $\gamma_\varepsilon = \rho_\Delta(0, z_\varepsilon)$，$\overline{U}_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, \rho_\Delta) = \{z \in \Delta \mid \rho_\Delta(z, z_\varepsilon) \leqslant \gamma_\varepsilon\}$ 是闭双曲圆盘，那么 0 是 $\overline{U}_{r_\varepsilon}(z_\varepsilon, \rho_\Delta)$ 的边界点. 现取 ε 的子列 $\varepsilon_j \to 0$，使得

$z_{\epsilon_j} \to z_0 \in \partial\Delta$，那么$\overline{U}_{r_{\epsilon_j}}(z_{\epsilon_j}, \rho_\Delta)$有一个极限圆盘$U_0$，它以0为一个边界点，且与单位圆周相切于$z_0$. 另一方面，由推论1.1，$f_\epsilon(\overline{U}_{r_\epsilon}(z_\epsilon, \rho_\Delta)) \subset \overline{U}_{r_\epsilon}(z_\epsilon, \rho_\Delta)$，因此，$f$将$U_0$映到$U_0$内，仍由于$f$在$U_0$内没有不动点，则对于$z \in U_0$，$f^n(z) \to \partial U_0$，若$\hat{z} \in \partial U_0$是$f^n(z)$的一个极限点且$\hat{z} \neq z_0$，那么，同定理1.5的讨论，$\hat{z}$是$f$的不动点，但与$\hat{z} \in \Delta$矛盾，因此，$f^n(z)$只有一个极限点$z_0 \in \partial\Delta$，即$f^n(z) \to z_0 (n \to \infty)$. 继续同定理1.5的讨论，$\Delta$内任意两点的轨道有相同的极限点集，因此，对$\forall z \in \Delta$，$f^n(z) \to z_0 \in \partial\Delta\ (n \to \infty)$. 证毕.

§1.4 其他 Riemann 曲面上的解析动力学初步

前面介绍了双曲 Riemann 曲面上的解析动力学. 定理1.4说明，双曲 Riemann 曲面上的动力学性质是比较简单的. 现在我们来观察其他类型 Riemann 曲面上的动力系统. 由定理1.2，我们知道，其他类型 Riemann 曲面共有四种：环面T，复平面$\mathscr{C}$，穿孔复平面$\mathscr{C}^*$以及 Riemann 球面$\hat{\mathscr{C}}$.

先观察T上的解析动力系统. 我们将看到，T上的解析自映射有相当简单的形式. 首先我们有$T = \mathscr{C}/\Lambda$，这里Λ是由两个实线性无关的复数ω_1，ω_2生成的格点群. 同样，我们可以用万有覆盖曲面$\mathscr{C}$的自然参数作为T的参数.

引理1.7 T上的解析自映射必为仿射映射$z \mapsto \alpha z + c \pmod \Lambda$. 这里$\alpha$满足$\alpha\Lambda \subset \Lambda$.

证明 设$f: T \mapsto T$是解析自映射，$T = \mathscr{C}/\Lambda$，不妨设Λ由复数1及$\tau \notin \mathscr{R}$生成，f可以提升为T的万有覆盖$\mathscr{C}$上的解析自映射$F: \mathscr{C} \mapsto \mathscr{C}$，那么，对任意$\lambda \in \Lambda$，有$F(z+\lambda) - F(z) \in \Lambda$. 由于$\Lambda$是离散点集，因而$F(z+\lambda) - F(z) \equiv \lambda' \in \Lambda$，特别地，存在$\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$，有

$$F(z+1) = F(z) + \lambda_1,\ F(z+\tau) = F(z) + \lambda_2,$$

令 $g(z) = F(z) - \lambda_1 z$，那么 $g(z+1) = g(z)$，$g(z+\tau) = g(z) + (\lambda_2 - \lambda_1\tau)$. 如果 $\lambda_2 - \lambda_1\tau = 0$，那么，对任意 $\lambda \in \Lambda$，$g(z+\lambda) \equiv g(z)$，因而 g 是 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}$ 的有界解析映射，由 Liouville 定理，$g(z) \equiv c$（常数）；若 $\lambda_2 - \lambda_1\tau \neq 0$，作投影 $\pi: \mathscr{C} \mapsto \mathscr{C}/(\lambda_2 - \lambda_1\tau)\mathscr{Z} \equiv \mathscr{C}^*$，那么，$g$ 可以投影为 $\mathscr{C} \mapsto \mathscr{C}^*$ 的解析映射 $\pi \circ g$，且有 $\pi \circ g(z+\lambda) = \pi \circ g(z)$ $(\lambda \in \Lambda)$，故仍有 $g(z) \equiv c$，所以，$F(z) = \lambda_1 z + c$. 取 $\alpha = \lambda_1$，那么 $f(z) = \alpha z + c(\mathrm{mod}\ \Lambda)$. 又对任意 $\lambda \in \Lambda, F(z+\lambda) - F(z) \in \Lambda$，故立即得 $\alpha\lambda \in \Lambda$，即 $\alpha\Lambda \subset \Lambda$. 证毕.

下面给出 T 上解析自映射的动力系统的刻画，在这里及以后，周期点起了重要作用.

定义 1.3 设 $f: S \mapsto S$ 是 Riemann 曲面 S 上的解析自映射，$z \in S$ 称为是 f 的周期点，如果存在 $p \geqslant 1$，使得

$$f^p(z) = z.$$

满足上式的最小 p 称为周期点 z 的周期，周期点的轨道称为周期轨道.

显然，周期轨道是一条有限轨道.

引理 1.8 设 $f(z) = \alpha z + c(\mathrm{mod}\ \Lambda)$ 是环面 $T = \mathscr{C}/\Lambda$ 上解析自映射，如果 $\alpha \neq 0, 1$，那么，f 的周期点在 T 上稠密.

证明 设 Λ 由 1 与 $\tau \notin R$ 生成，由于 $\alpha \neq 1$，f 在 T 内至少有一个不动点 c_0，作合适的坐标变换，可以假设 $f(z) = \alpha z(\mathrm{mod}\ \Lambda)$. 现考虑 $f^p(z) = \alpha^p z$，$p \geqslant 1$. 由于 $\alpha\Lambda \subset \Lambda$，$\alpha^p\Lambda \subset \Lambda$，因此 α^p 一定有形式 $\alpha^p = m_p + n_p\tau$，这里 $m_p, n_p \in \mathscr{Z}$. 如果存在 $M > 0$，$|m_p| + |n_p| \leqslant M$ $(p \geqslant 1)$，那么，一定存在 $p_1 > p_0$，使得 $\alpha^{p_1} = \alpha^{p_0}$，因此，对任意 $z \in T$，$\alpha^{p_1 - p_0}(\alpha^{p_0} z) = \alpha^p z = \alpha^{p_0} z$，即 $\alpha^{p_0} z$ 是 f 的周期点. 由于 f 是到上的，故任意 $z \in T$ 是 f 的周期点. 因此，可以假定 $|m_p| + |n_p| \to \infty$ $(p \to \infty)$. 又因 $z \in T$ 是 f 的周期点，当且仅当存在 $p \geqslant 1$，z 满足方程 $f^p(z) = \alpha^p z = z(\mathrm{mod}\ \Lambda)$，等价地 $((m_p - 1) + n_p\tau)z = m + n\tau$（这里 $m, n \in \mathscr{Z}$），而在任意半径为 $2|(m_p - 1) + n_p\tau|$ 的圆盘 U 内，都可选取适当的 $m, n \in \mathscr{Z}$，使上述方程有解 z_0，所以 z_0 即为 f 的周期点. 但由 $|m_p| + |n_p| \to \infty (p \to \infty)$，当 p 充分大时，U 的半径可以任意

小，这就证明了 f 的周期点在 T 内稠密. 证毕.

引理说明 T 上的解析动力学是复杂的，但不难加以统一的刻画，以后我们也不再讨论 T 上的解析动力系统，余下的情形为 Riemann 球面$\hat{\mathscr{C}}$、复平面 $\mathscr{C}$ 和穿孔复平面$\mathscr{C}^*$上的动力系统.

如果 f 是$\hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 的解析映射，那么 f 只有有限多个极点为奇点，故 f 一定是有理函数. 若 $f: \mathscr{C} \mapsto \mathscr{C}$ 是解析映射，那么 f 是整函数，而 $f: \mathscr{C}^* \mapsto \mathscr{C}^*$ 的解析映射是以 0 和∞为本性奇点的解析函数. 我们称$\hat{\mathscr{C}}$上的解析动力系统为有理函数动力系统，而 $\mathscr{C}$ 上的动力系统称为整函数的动力系统. 由于 $\mathscr{C}$ 是$\mathscr{C}^*$的万有覆盖曲面，而且投影为指数函数，不难把$\mathscr{C}^*$上的解析自映射提升到 $\mathscr{C}$ 上来考虑，因此，以后我们将只讨论有理函数动力系统和整函数动力系统.

现在我们举例说明$\hat{\mathscr{C}}$(或 $\mathscr{C}$)上解析动力系统的复杂性，考虑最简单的$\hat{\mathscr{C}}$上(同时也是 $\mathscr{C}$ 上)的解析函数——多项式：

$$f_\lambda(z) = \lambda z(1 - z),$$

这里 λ 为非零参数.

显然，当 $|z|$ 充分大时，$f_\lambda^n(z) \to \infty (n \to \infty)$，即 z 的轨道趋向于 ∞，∞是 f_λ 的吸引不动点.

现在考虑 $0 < \lambda \leqslant 4$，这时实轴上区间 $I = [0, 1]$ 是 f_λ 的不变区间，即 $f_\lambda(I) \subset I$，因此 $z \in I$ 的轨道不再收敛于∞. 考虑 $z \in I$ 的轨道，f_λ 有两个有限不动点 $z_0 = 0$，及 $z_1 = 1 - \frac{1}{\lambda}$，它们分别有乘子 $f_\lambda'(z_0) = \lambda$，$f_\lambda'(z_1) = 2 - \lambda$. 我们让 λ 从 0 开始逐渐增加，易验证：当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时，任意 $z \in I$ 的轨道收敛于 $z_0 = 0$；而当 $1 < \lambda \leqslant 3$ 时，$z \in I$ 的轨道将收敛于吸引不动点 z_1. 让 λ 继续增加，我们看到 z 的轨道既不收敛于 $z_0 = 0$，也不收敛于 z_1(此时它们的乘子之模长均大于 1). 数值实验表明，此时 z 的轨道交替地收敛于两个不同的点 p 和 q，即 $f_\lambda^{2n+1}(z) \to p$，$f_\lambda^{2n}(z) \to q (n \to \infty)$. 这里，$p$ 和 q 是方程 $f_\lambda^2(z) = z$ 的两个不同于 z_0 与 z_1 的解，$f_\lambda(p) = q$，$f_\lambda(q) = p$，即 $\{p, q\}$ 是 f_λ 的

周期为 2 的周期轨道，我们称 z 的轨道收敛于一个周期为 2 的周期轨道 $\{p, q\}$. 这时，周期点 p 的乘子 $(f_\lambda^2)'(p)$ 的模长小于 1. 如果让 λ 再继续增加，当 λ 达到某个值 $\lambda_1 < 4$ 时，乘子 $(f_\lambda^2)'(p)$ 的模长达到 1. 而当 λ 超过 λ_1 时，$|(f_\lambda^2)'(p)| > 1$，这时，z 的轨道也不能收敛于 2 周期轨道 $\{p, q\}$，数值计算表明，此时 z 的轨道将收敛于一个周期为 4 的周期轨道. 再继续增加 λ，那么 z 的轨道将随着 λ 的增加而收敛于 8 周期轨道，16 周期轨道，……等等. 而当 $\lambda = 4$ 时，$z \in I$ 的轨道不再收敛于任何周期轨道，除非 z 本身是周期点. 而 f_λ 的周期点在区间 I 上稠密，且存在这样的 $z \in I$，其轨道也在 I 上稠密. 上述倍周期现象可用下面的图 1.2来描述. 对于复的 λ 及复的 z，其轨道将更为复杂，此时尚无法进行描述(参见文献[Dev]).

上述简单的函数族说明了 $\hat{\mathscr{C}}$(或 $\mathscr{C}$)上的解析自映射，其轨道有各种各样的极限状态，是极为复杂的，而且，不同的映射有不同的动力学性质，因而，其动力系统有相当丰富的内容，有必要进行深入的研究.

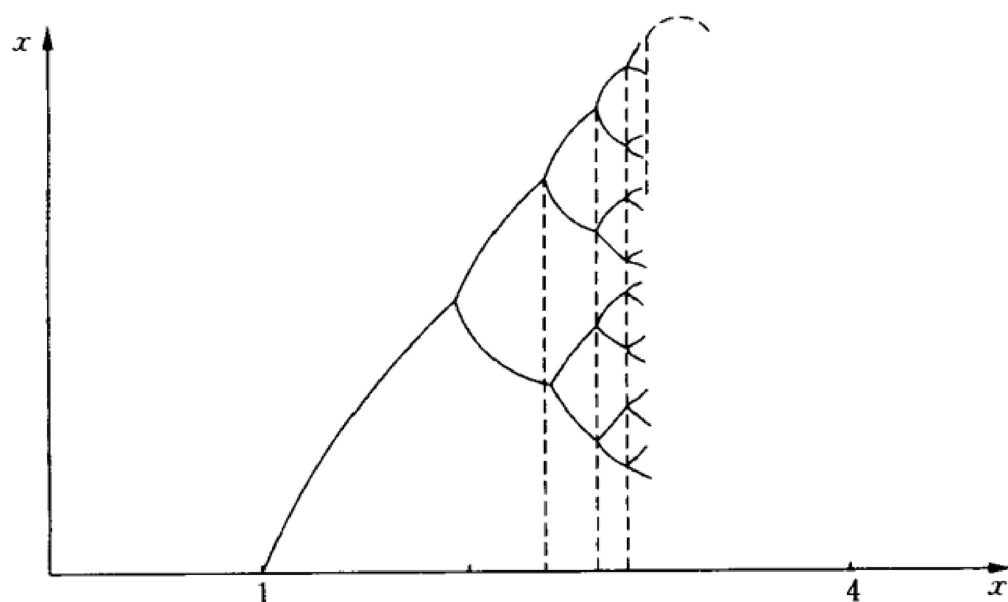


图 1.2 $f(x) = \lambda x(1 - x)$ 的倍周期现象

参 考 文 献

[AS] L. Ahlfors and L. Sario, *Riemann Surfaces*. Princeton Press

1960.

[FK] H. Farkas and I. Kra, *Riemann Surface.* Springer 1980.

[Mil] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable: Introductory Lectures.* SUNY Stony Brook. IMS preprint 1990/5.

[Den] A. Denjoy, Sur l'iteration des fonctions analytiques. *C. R. Acad. Sci. Paris* 182 (1926) 255-257.

[Dev] Robert L. Devaney, *Dynamics of simple maps, Chaos and Fractals, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics,* Vol. 39, Editors: Robert L. Devaney and Linda Keen, American Mathematical Society, Province, Rhode Island, 1989.

第二章　有理函数的动力系统：Fatou-Julia 理论

有理函数在整个 Riemann 球面$\hat{\mathscr{C}}$上的迭代开始于 1906 年 Fatou 的一篇论文[Fa1]，他发现，对几乎所有的点，有理函数 $f(z) = z^2/(z^2 + 2)$ 的轨道均收敛于 0，但有一个 Cantor 集为例外. 稍后，Fatou[Fa2]和 Julia[Ju]独立地对有理函数的迭代进行了系统的研究，发现了有理函数具有丰富的动力学性质，而在此之前，解析函数的迭代都是在不动点的一个邻域内进行讨论的. 这些局部研究是在 19 世纪末由 Schröder[Sch]，Koenigs[Koe]Leau[Leau]和 Böttcher[Böt]以及较后的 Siegel[Sie]等所发展. 本章将介绍局部的和整体的动力系统的这些经典结果.

§2.1　基本概念

§2.1.1　周期点

设 $R: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$是有理函数，则 R 可表示为

$$R(z) = P(z)/Q(z),$$

这里 P 和 Q 是两个多项式，没有公共因子，即$(P, Q) = 1$. 记 $\deg P$ 为多项式 P 的次数，定义

$$\deg R = \max(\deg P, \deg Q),$$

称为有理函数 R 的度，它等于方程 $R(z) = a \in \hat{\mathscr{C}}$ 的根的个数（重根计重数）.

当 $\deg R = 1$ 时，$R(z)$ 为分式线性变换 $R(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$，$ad - bc \neq 0$，又称为 Möbius 变换．Möbius 变换的动力学非常简单，读者不难自己加以考虑，我们不考虑这种情形．当然也不考虑 $R(z) \equiv C$ 的情形，因此，我们只考虑 $\deg R \geqslant 2$ 的情形．以后，若不加说明，我们说 R 是有理函数总是假定 $\deg R \geqslant 2$ 的，而把度为 1 的有理函数称为 Möbius 变换.

下面引进一些重要术语．它们中有些已在第一章中定义过.

定义 2.1 设 R 为有理函数，$\deg R \geqslant 2$，$z_0 \in \hat{\mathscr{C}}$，称序列 $\{z_0 = R^0(z_0),\ z_1 = R^1(z_0),\ \cdots,\ z_n = R^n(z_0),\ \cdots\}$ 为 R 在点 z_0 的轨道（或称为正向轨道），记为 $O_R(z_0)$ 或简记为 $O(z_0)$．称点集 $\{z_1,\ R^{-1}(z_0),\ R^{-2}(z_0),\ \cdots,\ R^{-n}(z_0),\ \cdots\}$ 为 R 在点 z_0 的逆轨道（或称为逆向轨道），记为 $O_R^-(z_0)$ 或 $O^-(z_0)$．这里 $R^{-n}(z_0) = (R^n)^{-1}(z_0)$ 表示 z_0 在 R^n 下的逆像全体．而序列 $\{z_0,\ z_{-1},\ \cdots,\ z_{-n},\ \cdots\}$ 若满足 $f(z_{-n}) = z_{-(n-1)}$，则称为点 z_0 的逆轨道分支.

一类重要的轨道是周期轨道，定义如下.

定义 2.2 称 $z_0 \in \hat{\mathscr{C}}$ 为 R 的周期点，如果存在正整数 p 使得 $R^p(z_0) = z_0$，满足该式的最小的 p 称为 z_0 的周期．这时，z_0 的轨道是一条有限轨道：$O(z_0) = \{z_0,\ z_1 = R(z_0),\ \cdots,\ z_{p-1} = R^{p-1}(z_0)\}$，称其为周期轨道或循环，$p$ 为其周期.

显然，周期轨道内每一点都是周期点，具有相同的周期 p.

定义 2.3 设 $z_0 \in \hat{\mathscr{C}}$ 是 R 的周期点，周期为 p，则称 $\lambda = (R^p)'(z_0)$ 为 z_0 的乘子（或特征值）．若 z_0 的轨道为 $O(z_0) = \{z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_{p-1}\}$，则 $\lambda = \prod\limits_{j=0}^{p-1} R'(z_j)$．因此，$O(z_0)$ 内每一点都有相同的乘子，故 λ 也称为周期轨道 $O(z_0)$ 的乘子.

注 当 $z = \infty$ 或 $R(z) = \infty$ 时，在 ∞ 邻域内取局部坐标 $\dfrac{1}{z}$，这时，求导运算在 ∞ 的邻域内也有定义．例如，如果 $R(\infty) = \infty$，则 ∞ 的乘子为 $\lim\limits_{z\to\infty} 1/R'(z)$.

下面给出周期点的分类.

定义 2.4 设 z_0 是 R 的周期点,周期为 p,乘子 $\lambda = (R^p)'(z_0)$,那么

1) 如果 $0 < |\lambda| < 1$,则称 z_0 是吸引周期点;

2) 如果 $\lambda = 0$,则称 z_0 是超吸引周期点;

3) 如果 $|\lambda| > 1$,则称 z_0 是排斥周期点;

4) 如果 $|\lambda| = 1$,则称 z_0 是中性周期点,此时,$\lambda = e^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathscr{R}$. 进一步,如果 θ 是有理数,则称 z_0 是有理中性周期点;如果 θ 是无理数,则称 z_0 为无理中性周期点.

上述分类对周期轨道 $O(z_0)$ 也适合,对应地称为吸引周期轨道、超吸引周期轨道……等等.

§2.1.2 临界点与分支覆盖

有理函数动力系统的另一重要概念是临界点.

定义 2.5 设 $c \in \hat{\mathscr{C}}$,如果 $R'(c) = 0$,则称 c 为 R 的临界点. 临界点 c 的像 $v = R(c)$ 称为临界值,即 R^{-1}的支点. 临界点的轨道称为临界轨道.

直接计算表明,若 $\deg R = d$,则 R 的临界点个数不超过 $2d-2$. 如果 $z \in \hat{\mathscr{C}}$ 不是 R 的临界点,那么 R 在 z 的邻域内是局部同胚. 若 c 是 R 的临界点,则 R 在 c 的邻域内不再是同胚,这时,存在局部共形映射 φ, ψ, $\varphi(c) = 0$, $\psi(R(c)) = 0$,使得 $\psi \circ R \circ \varphi^{-1}(z) = z^k (k \geqslant 2)$. 称 k 为 R 在点 c 的局部度,$k-1$ 是临界点 c 的重数. 若记 $C(R)$是 R 的临界点集,$V(R)$是 R 的临界值集,那么,$R: \hat{\mathscr{C}} \backslash R^{-1}(V(R)) \mapsto \hat{\mathscr{C}} \backslash V(R)$是覆盖映射.

定义 2.6 设 S_1 与 S_2 是两个 Riemann 曲面,解析映射 $f: S_1 \mapsto S_2$ 称为 d 层分支覆盖 $(d < \infty)$,如果对任意的 $w \in S_2$,存在 w 的邻域 W,使得

1) $f^{-1}(W, w) = \bigcup_{j=1}^{l} (V_j, z_j)$,这里 z_j 是 w 的逆像,V_j 是 z_j 的邻域

且 $V_i \cap V_j = \varnothing (i \neq j)$；

2）存在同胚 $\varphi_j: V_j \mapsto \Delta$, $\varphi_j(z_j) = 0$, $\psi_j: W \mapsto \Delta$, $\psi_j(w) = 0$，使得 $\psi_j \circ f \circ \varphi_j^{-1}(z) = z^{k_j}$；

3）$\sum_{j=1}^{l} k_j = d$.

k_j 称为 f 在点 z_j 的局部度. 如果 $k_j \geqslant 2$，则称 z_j 是 f 的分支点，此时 k_j 又称为 z_j 的分支指标，$k_j - 1$ 为分支点的重数. 无分支点的分支覆盖为覆盖映射.

下列性质是直接的，读者不妨自己验证：

1）任意 $w \in S_2$ 的逆像 $f^{-1}(w)$ 有 d 个点（计重数），故 d 也称为分支覆盖 f 的映射度，简称度；

2）若 $W \subset S_2$ 是一个区域，那么 f 是 $f^{-1}(W) \mapsto W$ 的分支覆盖，若 V 是 $f^{-1}(W)$ 的一个连通分支，则 f 也是 $V \mapsto W$ 的分支覆盖.

度为 d 的有理函数是 $\hat{\mathscr{C}}$ 到 $\hat{\mathscr{C}}$ 的分支覆盖，分支点即为临界点，而 d 即为其映射度.

下面定理中的 Riemann-Hurwitz 公式经常要用到. 记 $\chi(S)$ 为曲面 S 的 Euler 示性数.

定理 2.1 设 $f: S_1 \mapsto S_2$ 是 d 层分支覆盖，$d < \infty$，又设 f 的分支点为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，对应的分支指标为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，那么

$$\chi(S_1) = d \cdot \chi(S_2) - \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1).$$

证明 将曲面作三角剖分，则 Euler 示性数 = 顶点个数 + 面的个数 − 边的个数. 设 $\{v_1, \cdots, v_{n'}\}$ 是分支点集 $\{c_1, \cdots, c_n\}$ 的像集 $(n' \leqslant n)$，对 S_2 作三角剖分，使 $v_1, \cdots, v_{n'}$ 为顶点，那么，这个三角剖分在 f^{-1} 下的提升为 S_1 的三角剖分. 又 S_2 的边和面的提升不含有分支点，故每一边和面的提升对应于 d 个 S_1 的边和面. 另一方面，若顶点 $z \neq v_i$，则 z 也提升为 d 个 S_1 的顶点. 现考虑顶点 v_i，其原像包含分支点 $c_{i_1}, \cdots, c_{i_l} (l \leqslant n)$，由分支点定义，$f^{-1}(v_i)$ 内点的个数 $= d - \sum_{j=1}^{l} (k_{i_j} - 1)$，因

此 S_1 的顶点个数 $= d \times S_2$ 的顶点个数 $- \sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)$，从而 $\chi(S_1) = d \cdot \chi(S_2) - \sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)$. 证毕.

推论 2.1 度为 d 的有理函数 R 的临界点的个数(计重数)等于 $2d - 2$.

证明 由于$\hat{\mathscr{C}}$同胚于单位球面，其 Euler 示性数 $\chi(\hat{\mathscr{C}}) = 2$，因此由 Riemann-Hurwitz 公式，$\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1) = 2d - 2$. 这里 k_i 为临界点的局部度，$\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)$ 即为临界点的个数(计重数). 证毕.

注 Euler 示性数是定义在紧曲面上的，但是我们不难将其推广到非紧 Riemann 曲面上. 若 Riemann 曲面 S 有 $n < \infty$ 个边界分支，则 S 同胚于一个紧 Riemann 曲面 $\hat{S}$ 挖去 n 个穿孔点. 定义 $\chi(S) = \chi(\hat{S}) - n$，这时，Riemann-Hurwitz 公式仍成立.

下面给出分支覆盖的一个等价定义.

定义 2.7 一个映射 f 称为是逆紧的，如果每个紧集的逆像是紧集.

引理 2.1 设 S_1 和 S_2 是两个 Riemann 曲面，$f: S_1 \mapsto S_2$ 是解析映射，那么 f 是有限层分支覆盖的充要条件是 f 是逆紧的.

证明 显然，有限层分支覆盖是逆紧的. 我们要证明相反的结论. 设 $w \in S_2$ 是任意一点，由逆紧条件及解析映射零点孤立性，$f^{-1}(w) = \{z_1, \cdots, z_n\}$ 是有限集. 由解析映射的局部性质，存在 z_i 的局部坐标邻域 U_i 及 w 的局部坐标邻域 W_i，以及局部坐标投影 $\varphi_i: U_i \mapsto \Delta$, $\varphi_i(z_i) = 0$, $\psi_i: W_i \mapsto \Delta$, $\psi_i(w) = 0$，使得 $\psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}(z) = z^{k_i} (k_i \geq 1)$.

下面我们证明存在 w 的邻域 $W \subset \bigcap_{i=1}^{n} W_i$，使得 $f^{-1}(W) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. 事实上，容易验证 f 一定是闭映射，故 $f(S_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i)$ 是闭集，且不含 w. 若记它为 A，则 $S_2 \setminus A$ 是 w 的邻域，$f^{-1}(S_2 \setminus A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. 取 w 的邻域 $W \subset$

$S_2\backslash A$，且 $W\subset\bigcap_{i=1}^{n}W_i$，则 W 即为所求. 令 $V_i=U_i\cap f^{-1}(W)$，我们就得到了分支覆盖定义中的 1)与 2). 下面证明 3). 由于 S_2 中任意两点可由一条道路连接，而该道路可以被有限个上面所取到的邻域所覆盖，相邻两个邻域内点的逆像个数(计重数)是相等的，这就证明了 S_2 内每一点的逆像个数(计重数)是相等的. 证毕.

引理 2.2 设 V 和 W 是 $\hat{\mathscr{C}}$ 中区域，$f: V\mapsto W$ 解析，且连续到 $\overline{V}$，那么，f 是有限层分支覆盖的充要条件是 $f(\partial V)\subset\partial W$.

证明 由引理 2.1，f 是有限层分支覆盖等价于 f 是逆紧的，先证充分性. 设 $K\subset W$ 是紧集，我们要证 $f^{-1}(K)$是 V 中紧集. 如若不然，则存在点列 $\{z_n\}\subset f^{-1}(K)$，使得 $z_n\to z\in\partial V$，于是 $f(z_n)\to f(z)\in K$，此与 $K\cap\partial W=\varnothing$ 矛盾. 再证必要性. 这是由于，若有 $z\in\partial V$，使得 $f(z)\in W$，则对于是 $f(z)$的闭邻域 K，$f^{-1}(K)$在 V 中非紧，此与逆紧性矛盾. 证毕.

分支覆盖事实上可以是无穷层的，因此，一般的定义如下：

定义 2.8 设 S_1 和 S_2 是 Riemann 曲面，$f: S_1\mapsto S_2$ 是解析映射，那么 f 称为是分支覆盖，如果对任意的 $w\in S_2$，存在 w 的邻域 W，使得对 $f^{-1}(W)$的每个连通分支 V_i，$f: V_i\mapsto W$ 是逆紧映射.

最后我们再提一下共轭. 两个有理函数 R_1 和 R_2 是共形共轭的，如果存在 $\hat{\mathscr{C}}$ 上共形自同构 h，使得 $R_2=h\circ R_1\circ h^{-1}$. 共形共轭的有理函数有相同的解析动力学性质，所以只要讨论共轭等价类中的一个函数就够了. 例如：任一二次多项式共形共轭于下面的形式：

$$p_c(z)=z^2+C,$$

这是我们最感兴趣的函数族之一，将作专门介绍.

§2.2 Fatou 集和 Julia 集

Fatou 集和 Julia 集是有理函数动力系统中最重要的概念，在引进它们之前先要介绍 Montel 的正规族理论.

定义 2.9 设$U\subset\hat{\mathscr{C}}$是一个区域，$\mathscr{F}$ 是U 到$\hat{\mathscr{C}}$的解析映射(亚纯函数)族，如果$\mathscr{F}$ 内任一序列都有局部一致收敛的子序列，则称$\mathscr{F}$ 是一个正规族(这里，收敛是在球面度量下的)．等价地，$\mathscr{F}$ 在紧开拓扑下是相对紧的．

正规族还有如下等价定义(参见文献[Ah])．

定理 2.2 1) $\mathscr{F}$ 是正规族的充要条件是$\mathscr{F}$ 是局部等度一致连续的．

2) $\mathscr{F}$ 是正规族的充要条件是球面导数 $\dfrac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}(f\in\mathscr{F})$ 在U 内是局部一致有界的(Marty 定理)．

下面的 Montel 定理是正规族的基本判则，也是 Fatou-Julia 理论的基础之一．

定理 2.3(Montel 定理[mon]) 设$\mathscr{F}$ 是U 到$\hat{\mathscr{C}}$的解析映射族，如果每个$f\in\mathscr{F}$ 都不取$\hat{\mathscr{C}}$内固定的三个不同点a_1，a_2，a_3，那么，$\mathscr{F}$ 是正规族．

证明 记$\Sigma_3=\hat{\mathscr{C}}\setminus\{a_1, a_2, a_3\}$，那么，对任意的$f\in\mathscr{F}$，$f: U\mapsto\Sigma_3$，分别用$\lambda_U(z)|\mathrm{d}z|$和$\lambda_{\Sigma_3}(z)|\mathrm{d}z|$表示$U$ 和Σ_3 上在自然坐标下的双曲度量，由 Schwarz 引理(定理 1.3)，$\lambda_{\Sigma_3}(f(z))|f'(z)||\mathrm{d}z|\leqslant\lambda_U(z)|\mathrm{d}z|$．

现在设K 是U 内任意给定的紧集，那么$\lambda_U(z)\leqslant M<\infty$ (M 为常数)，因此$\lambda_{\Sigma_3}(f(z))|f'(z)|\leqslant M<\infty$．注意到当$z$ 趋向于三个边界点时$\lambda_{\Sigma_3}(z)$是趋向于无穷大的，故存在常数c，使$\dfrac{2}{1+|f(z)|^2}\leqslant c\lambda_{\Sigma_3}(f(z))$，这就证明了$\dfrac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\leqslant c\lambda_{\Sigma_3}(f(z))|f'(z)|\leqslant cM<\infty$，$\mathscr{F}$ 为正规族．

注 证明中我们假定了U 是双曲区域，但当$U=\mathscr{C}$或$\mathscr{C}^*$ 时，$U\mapsto\hat{\mathscr{C}}\setminus\{a_1, a_2, a_3\}$ 的解析映射只有常数映射，这就是著名的 Picard 定理．

正规族的定义是局部的，设$\mathscr{F}$ 是$U\mapsto\hat{\mathscr{C}}$的解析映射族，称$\mathscr{F}$ 在

一点 $z \in U$ 是正规的，如果存在 z 的邻域 N，$\mathscr{F}$ 是 N 上的正规族. 显然，若 $\mathscr{F}$ 在 U 内每一点是正规的，那么 $\mathscr{F}$ 是 U 上的正规族.

现在我们可以定义 Fatou 集和 Julia 集了.

定义 2.10 设 $R: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是有理函数，$d = \deg R \geqslant 2$，如果序列 $\{R^n\}$ 在 $z_0 \in \hat{\mathscr{C}}$ 是正规的，则称 z_0 是 R 的正规点. R 的正规点集称为 R 的 Fatou 集，记为 $F(R)$（或简记为 F）. $F(R)$ 的余集称为 R 的 Julia 集，记为 $J(R)$（或简记为 J）. 由定义可知，$F(R)$ 是开集，$J(R)$ 是闭集. $F(R)$ 的连通分支称为 Fatou 分支或稳定域.

引理 2.3 如果 $\deg R \geqslant 2$，则 R 的 Julia 集 $J(R) \neq \varnothing$.

证明 如果 $J(R) = \varnothing$，则 $\{R^n\}$ 在整个 $\hat{\mathscr{C}}$ 上正规，因此，存在子列 $n_j \to \infty$，使 R^{n_j} 一致收敛于解析映射 $g: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，那么，$g$ 也是有理函数，且 g 不为常数，$\deg g < \infty$. 由于当 j 充分大时，R^{n_j} 与 g 有相同个数的零点（计重数），故 $\deg R^{n_j} = \deg g$，但 $\deg R^{n_j} = (\deg R)^{n_j} \to \infty (j \to \infty)$，矛盾. 证毕.

引理 2.4 $J(R)$ 和 $F(R)$ 是完全不变的，即 $R(J(R)) = J(R) = R^{-1}(J(R))$，$R(F(R)) = F(R) = R^{-1}(F(R))$.

推论 2.2 若 D 是一个 Fatou 分支，则 $R(D)$ 也是 Fatou 分支，$R^{-1}(D)$ 的每个连通分支是 Fatou 分支.

引理 2.5 对任意 $p > 0$，$J(R^p) = J(R)$.

上述引理和推论的证明是直接的.

引理 2.6 R 的吸引和超吸引周期点属于 $F(R)$，排斥周期点属于 $J(R)$.

证明 设 z_0 为 R 的周期点，周期为 p，若 z_0 为吸引的或超吸引的，则其乘子之模 $|\lambda| = |(R^p)'(z_0)| < 1$. 因此，存在 z_0 的邻域 U，使得 $R^p(U) \subset U$. 由 Montel 定理，$z_0 \in F(R^p) = F(R)$. 若 z_0 是排斥的，则 $|\lambda| > 1$. 假设 $z_0 \in F(R)$，则存在 z_0 的邻域 U 以及子列 $\{R^{pn_j}\}$，使得 R^{pn_j} 在 U 内局部一致收敛于一个解析函数 g，显然有 $g(z_0) = z_0$. 这时 $(R^{pn_j})'(z_0) \to g'(z_0) (j \to \infty)$，但 $(R^{pn_j})'(z_0) = \lambda^{n_j} \to \infty$，矛盾. 证毕.

定义 $z_0 \in \hat{\mathscr{C}}$ 的大轨道 $GO_R(z_0) = \{z \in \hat{\mathscr{C}} \mid O_R(z) \cap O_R(z_0) \neq \varnothing\}$，即 $z \in GO_R(z_0)$ 当且仅当存在 $m, n \geqslant 0, R^m(z) = R^n(z_0)$. 显然，大轨道是 R 完全不变的. $O_R(z_0) \subset GO_R(z_0)$，$O_R^-(z_0) \subset GO_R(z_0)$.

一个点 $a \in \hat{\mathscr{C}}$ 称为是例外点，如果它的大轨道是有限点集，记例外点集为 $E(R)$，它也是完全不变的.

引理 2.7 $E(R)$至多由两个点组成，每个点 $a \in E(R)$ 是超吸引周期点，因而 $E(R) \subset F(R)$.

证明 设 $a \in E(R)$，那么，由 $GO_R(a)$是有限集及完全不变的，$GO_R(a)$即为 a 的周期轨道. 因此，$GO_R(a)$内每一点只有一个逆像点，即得 a 是一个 $(d-1)$ 重临界点 $(d = \deg R)$，故是超吸引周期点. 由于临界点集是有限集(推论 2.1)，故$E(R)$是有限点集. 若$E(R)$内的点多于两个，由$E(R)$是完全不变的，得$\hat{\mathscr{C}} \setminus E(R)$也是完全不变的，因此，由 Montel 定理，$\{R^n\}$在$\hat{\mathscr{C}} \setminus E(R)$上正规，由此导出$\{R^n\}$在整个$\hat{\mathscr{C}}$上正规，与 $J(R) \neq \varnothing$ 矛盾. 证毕.

注 若 $E(R) = \{a\}$，则 $R^{-1}(a) = a$，作 Möbius 变换，令 $a \to \infty$，则 R 共形共轭于一个 d 次多项式. 若 $E(R) = \{a, b\}$，则作 Möbius 变换，令 $a \to 0$，$b \to \infty$，则 R 共形共轭于 $z \mapsto cz^{\pm d}$. 因此，若一有理函数不共形共轭于某个多项式或 $z \mapsto z^{-d}$，则没有例外点.

定理 2.4 对任意 $z_0 \in \hat{\mathscr{C}} \setminus E(R)$，其逆轨道$O_R^-(z_0)$的极限点集包含 R 的 Julia 集 $J(R)$，特别地，如果 $z_0 \in J(R)$，则 $\overline{O_R^-(z_0)} = J(R)$.

证明 任取 $z \in J(R)$ 及 z 的邻域U_0，考虑 $U = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(U_0)$，那么 $R(U) \subset U$，我们要证明 $U \supset \hat{\mathscr{C}} \setminus E(R)$. 这时 $z_0 \in U$，故存在 $z_1 \in U_0$ 及 n，使得 $R^n(z_1) = z_0$，即 $z_1 \in O_R^-(z_0)$，因此 z 是 $O_R^-(z_0)$的极限点. 现记 $U^c = \hat{\mathscr{C}} \setminus U$，则 $R^{-1}(U^c) \subset U^c$，又由 Montel 定理，U^c 至多包含两个点，这说明了 U^c 内任一点的逆轨道有限，从而其大轨道也有限，即得 $U^c \subset E(R)$.

若 $z_0 \in J(R)$，则由 $J(R)$是完全不变的，$O_R^-(z_0) \subset J(R)$，因此

$\overline{O_R^-(z_0)} = J(R)$.

推论 2.3 Julia 集 $J(R)$如果包含内点，则 $J(R)=\hat{\mathscr{C}}$.

证明 设 $z_0 \in J(R)$ 是内点，则存在邻域 $U \subset J(R)$，$z_0 \in U$. 对任意 $z \in \hat{\mathscr{C}} \backslash E(R)$，$z_0$ 是 $O_R^-(z)$的极限点，故存在 $z_1 \in O_R^-(z)$，使得 $z_1 \in U \subset J(R)$. 由 $J(R)$的完全不变性，$z \in J(R)$，即 $\hat{\mathscr{C}} \backslash E(R) \subset J(R)$. 又因 $J(R)$是闭的，即得 $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$. 证毕.

稍后我们将给出一个例子，说明存在有理函数 R，使得 $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$，这时 $F(R) = \varnothing$.

推论 2.4 $J(R)$是完全集，即 $J(R)$不含有孤立点.

证明 首先由引理 2.6 及 $J(R)$的完全不变性，$J(R)$一定是无限集，故至少有一极限点. 再由定理 2.4，得每一点都是 $J(R)$的极限点. 证毕.

推论 2.5 存在 $J(R)$的稠密的 G_δ 集的子集 G，使得对任意 $z \in G$，z 的正向轨道$O_R(z)$在$J(R)$内稠密.

这里，一个集合称为 G_δ 集，如果它是可数多个开集的交集.

证明 设$\{B_j\}$是形成$\hat{\mathscr{C}}$的拓扑基的可数开集族，对任意与 $J(R)$相交的 B_j，$U_j = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} R^{-n}(B_j)$ 是开集，且由定理 2.3，$U_j \cap J(R)$ 在 $J(R)$ 内稠密. 令 $G = \bigcap\limits_j (U_j \cap J(R))$，则 G 在$J(R)$内稠密，且是 G_δ 集. 对任意 $z \in G$，其正向轨道与每个 B_j 相交，即在$J(R)$内稠密. 证毕.

集合 χ 的稠密 G_δ 子集也称为剩余子集，一个性质对 z 属于 χ 的剩余子集成立，也称为对一般的(generic) $z \in \chi$ 成立.

下面考察几个特殊有理函数的 Julia 集.

例 2.1 考虑 $f_d(z) = z^d$，$|d| \geqslant 2$，则单位圆周 S' 是 f_d 的完全不变集. 如果 $d > 0$，则当 $|z| < 1$ 时，$f_d^n(z)$局部一致收敛到 0，当 $|z| > 1$ 时，$f_d^n(z)$局部一致收敛到∞，0 与∞是 f_d 的两个超吸引不动点. 当 $|z| = 1$ 时，则对 z 的任意邻域 U，都存在点 z_1，$z_2 \in U$，使 $f_d^n(z_1) \to 0$，$f_d^n(z_2) \to \infty$，故$\{f_d^n\}$在单位圆周 $S' = \{|z| = 1\}$ 上不正规. 因此，f_d 的

Julia 集是单位圆周 S'. 同样，当 $d<0$ 时，$J(f_a)=S'$，这时，对任意 $z\notin S'$，$f_a^n(z)$收敛于它的二周期轨道$\{0, \infty\}$.

例 2.2 $f(z)=z^2-2$，这时实轴上的区间 $I=[-2, 2]$是 f 的完全不变子集，因此迭代序列$\{f^n\}$在$\hat{\mathscr{C}}\backslash I$ 上不取 I 内的点，由 Montel 定理，$\hat{\mathscr{C}}\backslash I\subset F(f)$. 又当$|z|$充分大时，$f^n(z)$一致收敛到$\infty$，因此 $f^n(z)$在整个$\hat{\mathscr{C}}\backslash I$ 上局部一致收敛于∞. 现设 $z\in I$，那么在 z 的任一邻域 U 内，有些轨道收敛于∞，而另一些轨道保持有界(在 I 内)，故$\{f^n\}$在 $z\in I$ 不正规，所以 $F(f)=\hat{\mathscr{C}}\backslash I, J(f)=I$.

例 2.3 $f(z)=2z-\dfrac{1}{z}$. 易验证，f 保持上半平面、下半平面以及单位圆外部不变，因此 $J(f)\subset I=[-1, 1]$. 在 I 上 f 如图 2.1 所示. 考虑区间 $I_0=\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $f(I_0)\subset(\mathscr{R}\cup\{\infty\})\backslash I$，因此，$I_0\subset F(f)$. 记 $K_1=\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$, $K_2=\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$，则 $J(f)\subset K_1\cup K_2$，$f(K_i)=I$，且 f 在 K_i 上单调上升，$i=1, 2$. $K_1\cup K_2$ 在每个 K_i 上的逆像也分成两个不相交的闭区间，分别记为 K_{i1}和 K_{i2}，满足 $f(K_{ij})=K_j$, $i, j=1, 2$. 一般地，在 I 内有 2^n 个互不相交的闭区间 $K_{i_1i_2\cdots i_n}$($i_k=1, 2, k=1, \cdots, n$)，可归纳地定义如下：

$$K_{i_1\cdots i_n}\subset K_{i_1}, f(K_{i_1\cdots i_n})=K_{i_2\cdots i_n}.$$

记 $J=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i_1, \cdots, i_n=1, 2}K_{i_1\cdots i_n}$，则 $z\in J$ 当且仅当对任意 n, $f^n(z)\in I$，且 J 是完全不变的. 与前面一样，$J(f)=J$. 由构造可知，J 是一个完全不连通集合. 称 J 为一个(广义的)Cantor 集.

最后，我们构造一个有理函数 R，使得 $J(R)=\hat{\mathscr{C}}$. 下面的构造是属于 Lattés[Lat]的.

例 2.4 考虑环面 $T=\mathscr{C}/\Lambda$，这里 $\Lambda=\mathscr{Z}+\tau\mathscr{Z}$ 是由 l 与 τ 生成的格点群，$\tau\notin\mathscr{R}$. 考虑 T 的共形自同构 $I(z)=-z(\mathrm{mod}\Lambda)$，$I$ 在 T 内有四个不动点 0, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\tau}{2}$, 及$\dfrac{1+\tau}{2}$. 考虑商空间 $S=T/\{z, -z\}$，即

将 T 的 z 与 $-z$ 投影为 S 中同一点，那么 S 是一个 Riemann 曲面. 事实上，在 I 的不动点 z_i 处，可以用 $(z-z_i)^2$ 作为局部坐标，其他点则仍用 z 作局部坐标. 这样，自然投影 $T \mapsto S$ 是一个二到一的分支覆盖(2层分支覆盖)，分支点为 I 的四个不动点，下面证明 S 共形等价于 $\hat{\mathscr{C}}$. 首先由 T 是紧 Riemann 曲面得 S 是紧的，我们来计算 S 的亏格 g. 由于 T 的 Euler 示性数 $\chi(T)=0$，由 Riemann-Hurwitz 公式：$\chi(T)=2\chi(S)-4$ 得到 $\chi(S)=2$，这样 $g=2-2\chi(S)=0$，即 S 同构于 Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}}$.

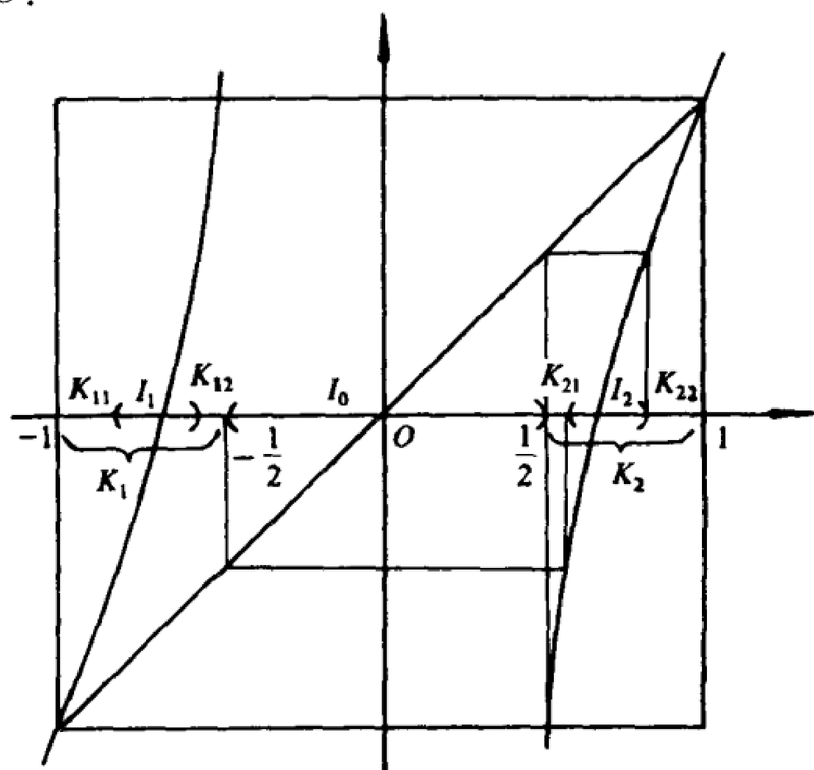


图 2.1　函数 $f(z)=2z-\dfrac{1}{z}$

定义 T 到 T 上的映射 $\widetilde{R}: z \mapsto 2z\,(\mathrm{mod}\Lambda)$，那么 $\widetilde{R}$ 是四到一的映射，即 $\deg\widetilde{R}=4$，又 $\widetilde{R}$ 与 $I(z)=-z$ 可交换，因此 $\widetilde{R}$ 可以投影为 S 到 S 上的解析映射 R. 如果我们将 S 等同于 $\hat{\mathscr{C}}$，那么 R 即为 $\hat{\mathscr{C}}$ 到 $\hat{\mathscr{C}}$ 的有理函数，且有 $\deg R=4$. 由引理 1.8，$\widetilde{R}$ 的周期点在 T 内稠密，容易看出每个周期点的乘子为 2 的幂，因而是排斥周期点. 投影到 $\hat{\mathscr{C}}$ 上，R 的周期点

在$\hat{\mathscr{C}}$内稠密，且都是排斥周期点，由引理 2.6 及 $J(R)$是闭集，即得 $J(R)=\hat{\mathscr{C}}$.

如果我们将 I 的四个不动点分别投影为$\hat{\mathscr{C}}$上的四个点∞，0，1，$a\in\hat{\mathscr{C}}$，可以验证，R 有形式：

$$R(z)=\frac{(w^2-a)^2}{4w(w-1)(w-a)},$$

特别取 $a=-1$，则

$$R(z)=\frac{(w^2+1)^2}{4w(w^2-1)}.$$

§2.3 周期点的局部动力学(一) 吸引、超吸引和有理中性周期点

现在我们回过头来考虑有理函数 R 在其周期点附近的局部动力学，设 z_0 是 R 的周期点，周期为 p，乘子为 λ. 若作一 Möbius 变换将 z_0 映成 0，则 R^p 共形共轭于有理函数 f，它以 0 为不动点，且在 0 点有展开式：

$$f(z)=\lambda z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots, \tag{2.1}$$

故我们考虑函数 f 在 0 点的局部动力学.

§2.3.1 吸引周期点情形

这时 $0<|\lambda|<1$，我们有下面的 Koenigs 定理，也称为局部线性化定理.

定理 2.5(Koenigs 定理[Koe]) 设 f 由(2.1)式给出，$0<|\lambda|<1$，那么，存在 0 的邻域 U 以及唯一的一个共形同胚 $\varphi: U\mapsto\Delta_r=\{z\mid |z|<r\}$，使得 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$，且满足 Schröder 方程：

$$\varphi\circ f(z)=\lambda\varphi(z). \tag{2.2}$$

证明 本定理有多种证明方法，这里给出一个分析证明. φ 的唯一性是明显的，我们证明 φ 的存在性.

考虑函数 $\varphi_n(z) = \frac{1}{\lambda^n} f^n(z)$，它在 0 的邻域内有定义. 若当 $n \to \infty$ 时，φ_n 在 0 的某个邻域内一致收敛，则极限函数 φ 即满足 Schröder 方程(2.2)，且 $\varphi(0) = 0$，$\varphi'(0) = 1$.

为证明 φ_n 收敛，取 $c > 0$，使 $c^2 < |\lambda| < c < 1$，又取 0 的邻域 $U_0 = \{z \mid |z| < \delta\}$，$\delta$ 充分小，使得当 $z \in U_0$ 时，$|f(z)| < c|z|$，因此，$f(U_0) \subset U_0$，从而对任意 $n > 0$，$|f^n(z)| < c^n |z| < \delta c^n$. 另外，当 δ 充分小时，存在常数 $K > 0$，使得 $|f(z) - \lambda z| < K|z|^2 (z \in U_0)$，故

$$|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| < K|f^n(z)|^2 < K\delta^2 c^{2n} \quad (z \in U_0),$$

因此

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| = \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} |f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)|$$

$$< \frac{K\delta^2}{|\lambda|}\left(\frac{c^2}{|\lambda|}\right)^n \quad (z \in U_0).$$

由于 $\alpha = \frac{c^2}{|\lambda|} < 1$，$\sum_n \alpha^n$ 收敛，因此 φ_n 在 U_0 内是一个一致收敛的 Cauchy 序列，φ_n 一致收敛于解析函数 φ. 取 Δ_r 充分小，令 $U = \varphi^{-1}(\Delta_r)$，则定理得证. 证毕.

设函数 f 在 z_0 的邻域内有定义，g 在 w_0 的邻域内有定义，若存在 z_0 的邻域到 w_0 的邻域的共形映射 φ，使得 $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$，则称 f 局部(共形)共轭于 g. 定理 2.5 表明 f 在 0 点局部共轭于线性映射 $z \mapsto \lambda z$，这时 f 在 0 点附近与 $z \mapsto \lambda z$ 有相应的迭代性质，这就给出了 f 在 0 点附近的局部动力学模型.

注 定理 2.5 对 $|\lambda| > 1$ 也成立，这时只要考虑 $f^{-1}(z)$ 即可，因此，当 $|\lambda| > 1$ 时，f 在 0 点也局部共轭于 $z \mapsto \lambda z$.

现在再考虑有理函数 R 的吸引周期轨道. 设 $O(z_0) = \{z_0, z_1, \cdots, z_{p-1}\}$ 是 R 的吸引周期轨道，那么对每个 $z_j (0 \leqslant j \leqslant p-1)$，$R^p$ 在 z_j 的邻域 U_j 内局部共轭于 $z \mapsto \lambda z$，因此，$R^{pn}(z)$ 在 U_j 内一致收敛于 z_j.

记 $A(z_j)$是包含 z_j 的 Fatou 分支，则 $R^{pn}(z)$在$A(z_j)$内局部一致收敛于 z_j，称$A(z_j)$为(周期点 z_j 的)吸引分支(也称为吸引稳定域或吸引盆)，称 $A(O(z_0)) = \bigcup_{j=0}^{p-1} A(z_j)$ 为吸引周期轨道 $O(z_0)$的直接吸引域. 吸引分支是周期的，即 $R^p(A(z_j)) = A(z_j)$.

定理 2.6 设 z_0 是 R 的吸引周期点，周期为 p，乘子为 λ，$A(z_0)$是包含 z_0 的吸引分支，那么存在唯一的分支覆盖映射 $\varphi: A(z_0) \mapsto \mathscr{C}$，满足 $\varphi(z_0) = 0, \varphi'(z_0) = 1$，且使下图可交换

$$\begin{array}{ccc} A(z_0) & \xrightarrow{R^p} & A(z_0) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathscr{C} & \xrightarrow[z \mapsto \lambda z]{} & \mathscr{C} \end{array}$$

证明 由定理 2.5，$z \mapsto \lambda z$，存在 z_0 的邻域U 及共形映射 $\varphi: U \mapsto \Delta_r$，$\varphi(z_0) = 0, \varphi'(z_0) = 1$，使得 $\varphi \circ R^p(z) = \lambda\varphi(z)$. 我们要把$\varphi$扩充到整个 $A(z_0)$上. 注意到 $A(z_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^{-pn}(U)$，这里 $R^{-pn}(U)$取包含U 的分支，对任意 $z \in A(z_0)$，存在 n，使 $R^{pn}(z) \in U$，那么，在 z 点定义 $\varphi(z) = \frac{1}{\lambda^n}\varphi \circ R^{pn}(z)$，即得 φ满足上述交换图. 仍旧利用局部共轭，φ的定义与 n 的选取无关，故定义是合理的，由 φ的定义形式，φ是 $U_n = R^{-pn}(U)$ 到其像的分支覆盖. 最后，$\varphi'(z) = 0$ 等价于存在 n，使 $(R^{pn})'(z) = 0$，故 φ的分支点集为 R^p 的临界点的逆轨道，φ是 $A(z_0) \mapsto \mathscr{C}$的分支覆盖(无穷层分支覆盖). 证毕.

推论 2.6 设 $O(z_0) = \{z_0, \cdots, z_{p-1}\}$ 是 R 的吸引周期轨道，则其直接吸引域 $A(O(z_0))$至少包含 R 的一个临界点 c，且 $O(c) \cap O(z_0) = \varnothing$.

证明 先证 $A(O(z_0))$的分支 $A(z_0)$一定包含 R^p 的临界点. 令 $A_0 = A(z_0) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-pn}(z_0)$，如果 A_0 不含 R^p 的临界点，那么，定理 2.6

中的分支覆盖 φ 成为 A_0 到 $\mathscr{C}^* = \mathscr{C}\setminus\{0\}$ 的(无分支)覆盖映射,但由 $\partial A(z_0) \subset J(R)$ 及$J(R)$ 是完全集知,A_0 是双曲 Riemann 曲面,而$\mathscr{C}^*$ 是抛物 Riemann 曲面,这是矛盾的.

另一方面,若 c_p 是 R^p 的临界点,则一定存在 k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $R'(R^k(c_p)) = 0$, 故 $c = R^k(c_p) \in A(z_k) \subset A(O(z_0))$ 是 R 的临界点. 证毕.

§2.3.2 超吸引周期点情形

这时 $\lambda = 0$, 在适当的 Möbius 变换下,f 在 0 点的展开式有如下形式:

$$f(z) = z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \cdots \quad (k \geqslant 2), \tag{2.3}$$

这时,我们有下面的 Böttcher 定理.

定理 2.7(Böttcher)定理[Böt] 设 f 由(2.3)式给出,那么,存在 0 的邻域 U 以及唯一的共形映射 $\varphi: U \mapsto \Delta_r (0 < r < 1)$, 使得 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, 且满足 Böttcher 方程:

$$\varphi \circ f(z) = \varphi(z)^k. \tag{2.4}$$

证明 比较(2.4)式两端的系数,利用规范条件即得 φ 的唯一性. 下面证明 φ 的存在性.

取 $U_0 = \{z \mid |z| < \delta\}$ 充分小,使 $f(\overline{U_0}) \subset U_0$, 且在 U_0 内只有唯一的零点 0,这样 f 在 U_0 内的局部度为 k,f^n 在 U_0 内的局部度为 k^n. 在 U_0 内$(f^n(z))^{1/k^n}$的每个分支是单值映射,取 $\varphi_n: U_0 \mapsto \mathscr{C}$,

$$\varphi_n(z) = (f^n(z))^{1/k^n}$$

是其中一个分支,使得 $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n'(0) = 1$, 那么,如果 φ_n 在 U_0 内一致收敛于 φ,则 φ满足 Böttcher 方程(2.4),以及规范化条件 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.

先证$\{\varphi_n\}$在 U_0 内正规,这只要证明

$$h_n(z) = \log_+ |\varphi_n(z)| = \frac{1}{k^n}\log_+ |f^n(z)|$$

一致有界，这里 $\log_+ x = \max(\log x, 0)$. 当 U_0 充分小时，

$$|f(z)/z^k| = |1 + a_{k+1}z + \cdots| < 2 \quad (z \in U_0),$$

且 $f^n(\overline{U}_0) \subset U_0$，故对任意 $z \in U_0$，

$$h_n(z) \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{k^{j+1}} \log_+ \left| \frac{f(f^j(z))}{(f^j(z))^k} \right| + \log_+ |z|$$

$$\leqslant \log 2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k^{j+1}} < \infty. \tag{2.5}$$

(2.5)式蕴含了 $|\varphi_n(z)|$ 在 U_0 内一致有界.

再证每个收敛子列 $\{\varphi_{n_j}\}$ 的极限函数满足(2.4)式. 由于

$$|\varphi_{n_j} \circ f(z) - (\varphi_{n_j}(z))^k| = |(f^{n_j+1}(z))^{\frac{1}{k^{n_j}}} - (f^{n_j}(z))^{\frac{1}{k^{n_j-1}}}|$$

$$= |\varphi_{n_j}(z)|^k \left| 1 - \left[\frac{f(f^{n_j}(z))}{(f^{n_j}(z))^k} \right]^{\frac{1}{k^{n_j}}} \right|,$$

且在 U_0 内 $f(z)/z^k \to 1 (z \to 0)$，以及 $f^n(z) \to 0 (n \to \infty)$，因此 $|\varphi_n(z)|$ 一致有界，于是即得 $|\varphi_{n_j} \circ f(z) - \varphi_{n_j}(z)^k| \to 0 (j \to \infty)$.

由唯一性，每个收敛子列收敛于同一极限函数 φ，故 φ_n 收敛于 φ. 证毕.

定理 2.7 表明在 R 的超吸引周期点附近，R^p 局部共轭于映射 $z \mapsto z^k$，这是超吸引周期点的局部模型.

设 $O(z_0) = \{z_0, z_1, \cdots, z_{p-1}\}$ 是 R 的超吸引周期轨道，我们可以同吸引周期轨道一样定义 $O(z_0)$ 的直接吸引域 $A(O(z_0))$ 以及对 $z_j \in O(z_0)$ 的超吸引 Fatou 分支 $A(z_j)$，$A(z_j)$ 也是周期的. 为方便计，我们考虑 z_0 为超吸引不动点.

定理 2.8 设 z_0 是 R 的超吸引不动点，$A(z_0)$ 是超吸引分支，那么，下列两者之一成立：

1) $R: A(z_0) \mapsto A(z_0)$ 共形共轭于变换 $g: \Delta \mapsto \Delta, z \mapsto z^k$；

2) $A(z_0)$ 包含一个临界点，其轨道与 z_0 不交.

证明 若 $A(z_0) \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} R^{-n}(z_0)$ 不含临界点，考虑 z_0 的单连通邻域

U_0,记 $U_n = R^{-n}(U_0)$,这里 U_n 取包含 U_0 的分支,则 $R^n: U_n \backslash R^{-n}(z_0) \mapsto U_0 \backslash \{z_0\}$ 是无分支覆盖,由 Riemann-Hurwitz 公式,$U_n \backslash R^{-n}(z_0)$ 与 $U_0 \backslash \{z_0\}$ 的 Euler 示性数都为 0,即得 U_n 也是单连通的且 $R^{-n}(z_0)$ 在 U_n 内只有一个点 z_0. 这样,定理 2.7 中的局部共形共轭 φ 可以通过 $\varphi(z) = [\varphi \circ R^n(z)]^{\frac{1}{K^n}}$ 扩充为 $A(z_0) \mapsto \Delta$ 的共形共轭. 证毕.

注 当 $A(z_0)$ 内包含一个临界点 $c \neq z_0$ 时,φ 不能扩充到整个 $A(z_0)$ 上使得它满足 Böttcher 方程,这是因为在 c 附近,$(\varphi \circ R(z))^{\frac{1}{k}}$ 不能确定为一个单值函数. 但 φ 可扩充到上面的 U_n 上,直到 U_n 包含一个临界点为止.

§ 2.3.3 有理中性周期点情形

设 f 由(2.1)式给出,这时,$\lambda = e^{\pi i \frac{p}{q}}$,这里 $p, q \in \mathcal{N}$,$(p, q) = 1$.

首先考虑 $\lambda = 1$ 的情形,这时,f 可写成

$$f(z) = z + az^{k+1} + o(|z|^{k+1}), \qquad (2.6)$$

这里 $a \neq 0$, $k \geqslant 1$.

先证明一个引理,记 $R_{x,a} = \{z = u + iv \mid u > x - a|v|\}$,这里,$x$, $a > 0$, x 充分大.

引理 2.8 设 $g(\zeta)$ 为定义在 $R_{x,a}$ 内的单叶解析函数,当 $|\zeta| \to \infty$ 时,$g(\zeta) = \zeta + 1 + o(1)$,那么,存在 $R_{x,a}$ 内的共形映射 φ, $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi(\zeta)/\zeta \to 1(|\zeta| \to \infty)$,满足 Abel 方程:

$$\varphi \circ g(\zeta) = \varphi(\zeta) + 1, \qquad (2.7)$$

证明 记 $g(\zeta) = \zeta + 1 + \eta(\zeta)$, $\eta(\zeta) = \dfrac{b_1}{\zeta} + \dfrac{b_2}{\zeta^2} + \cdots$,作变换

$$\zeta \mapsto h_1(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{1 + \eta(\zeta)} \approx \zeta - \log\zeta + o(1),$$

这里在 $R_{x,a}$ 内求不定积分,易验证 $h_1(\infty) = \infty$, $h_1(\zeta)/\zeta \to 1(|\zeta| \to \infty)$,利用 Cauchy 积分公式,$|\eta'(\zeta)| = o(1/|\zeta|)$,故 $|h_1''(\zeta)| = o(1/|\zeta|)(|\zeta| \to \infty)$,于是

$$h_1 \circ g(\zeta) = h_1(\zeta + 1 + \eta(\zeta))$$
$$= h_1(\zeta) + h_1'(\zeta)(1 + \eta(\zeta)) + o(1/|\zeta|)$$
$$= h_1(\zeta) + 1 + o(1/|\zeta|),$$

即 g 在 $R_{x,a}$共形共轭于 $g_1: \zeta \mapsto h_1 \circ g \circ h_1^{-1}(\zeta) = \zeta + 1 + o(1/|\zeta|)$.

对 g_1 进行同样的共轭变换，则存在 h_2，使得 g_1 共轭于 $g_2: S \mapsto h_2 \circ g_1 \circ h_2^{-1}(\zeta) = \zeta + 1 + o(1/|\zeta|^2)$，因此，当 $|\zeta|$ 充分大时，

$$|g_2(\zeta) - \zeta - 1| < \frac{1}{|\zeta|^2}. \tag{2.8}$$

另一方面，在 $\mathrm{Re}\zeta$ 充分大时，比如 $\mathrm{Re}\zeta > x$，而 x 充分大，则

$$|g_2(\zeta)| > |\zeta| + \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

而对任意 $\zeta \in R_{x,a}$，存在 $N = N(\zeta)$，当 $n \geqslant N$ 时，$\mathrm{Re}g_2^n(\zeta) > x$，因此当 $n > N$ 时，$|g_2^n(\zeta)| > |g_2^{n-1}(\zeta)| + \frac{1}{2} > |g_2^N(\zeta)| + \frac{1}{2}(n - N)$.

定义函数序列 $\psi_n(\zeta) = g_2^n(\zeta) - n$. 如果 ψ_n 在 $R_{x,a}$内局部一致收敛于 ψ，则 $\psi \circ g_2(\zeta) = \psi(\zeta) + 1$，$\psi(\zeta) = \zeta + 1 + o(1)(|\zeta| \to \infty)$，令 $\varphi = \psi \circ h_2 \circ h_1$ 即为所求.

但利用(2.8)式、(2.9)式，对任意 $k > 0$ 及 $n > N$，

$$|\psi_{n+k}(\zeta) - \psi_n(\zeta)| \leqslant \sum_{l=n}^{n+k-1} \frac{1}{|g_2^l(\zeta)|^2}$$
$$< \sum_{l=n}^{\infty} \frac{4}{(2|g_2^N(\zeta)| + l - N)^2} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

因此，ψ_n 是一个 Cauchy 序列，在 $R_{x,a}$内局部一致收敛. 证毕.

现在回过来考虑由(2.6)式给出的函数 f. f 在 0 的充分小邻域 U_0 内是单叶的，令 $\zeta = h(z) = -1/kaz^k$，那么 $z = h^{-1}(\zeta)$ 为∞邻域 $U_R = \{\zeta \mid |\zeta| > R\}$ 内的 k 值函数，定义 $g(\zeta) = h \circ f \circ h^{-1}(\zeta)$，则 g 也为 U_R 内的 k 值解析函数.

取 x 充分大，使 $R_{x,a}\subset U_R$，这时 h^{-1}在 $R_{x,a}$内可取到 k 个单值分支 $h_j^{-1}(j=1, 2, \cdots, k)$. 记 $L_j=h_j^{-1}(R_{x,a})$，它们是 k 个互不相交的单连区域，以 O 为公共边界点，且在 0 点有顶角 $2\theta/k$，其中 $\theta=\pi-\text{arc ctg}a$. 在 L_j 内，h 是一共形映射，从而 f 在 L_j 内共形共轭于 $R_{x,a}$内解析函数 $g_j:\zeta\mapsto h\circ f\circ h_j^{-1}(\zeta)$，它是 g 在 $R_{x,a}$内的一个单值分支，当 $|\zeta|\to\infty$时，有

$$
\begin{aligned}
g_j(\zeta) &= h\circ f\circ h_j^{-1}(\zeta)=-\frac{1}{kaz^k}(1+az^k+o(|z|^k))^{-k} \\
&= \zeta(1+kaz^k+o(|z|^k)) \\
&= \zeta\left(1+\frac{1}{\zeta}+o(1/|\zeta|)\right) \\
&= \zeta+1+o(1).
\end{aligned}
$$

由 $g_j(\overline{R}_{x,a})\subset R_{x,a}\cup\{\infty\}$ 及 $g_j^n(\zeta)\to\infty\ (\zeta\in R_{x,a})$，得 $f(\overline{L}_j)\subset L_j\cup\{0\}$，且 $f^n(z)\to 0(z\in L_j)$. 称 L_j 为 f 在 0 点的吸引花瓣. 由引理 2.7，g_i 在 $R_{x,a}$内共形共轭于 $\zeta\mapsto\zeta+1$，故 f 在 L_j 内共形共轭于 $\zeta\mapsto\zeta+1$. 这 k 个吸引花瓣 $L_j(j=1, 2, \cdots, k)$均匀排列在 0 点周围，相邻两个吸引花瓣 L_j 和 L_{j+1}在 0 点的夹角为 $2(\pi-\theta)/k<\frac{\pi}{k}$.

另一方面，考虑 $f^{-1}(z)=z-az^{k+1}+o(|z|^{k+1})(|z|\to 0)$，则 f^{-1} 在 0 点也有 k 个吸引花瓣 $L'_j(j=1, 2, \cdots, k)$，每个 L'_j 在 0 点的顶角也为 $2\theta/k$，且正好位于相邻的两个吸引花瓣 L_j 与 L_{j+1}之间，在 0 点附近与 L_j 与 L_{j+1}相交(见图 2.2). 在每个 L'_j 内，$f^{-1}(z)$共形共轭于某个 $R_{x,a}$内的变换 $\zeta\mapsto\zeta+1$，故 $f(z)$在 L'_j 内共形共轭于 $R_{x,a}$上的变换 $\zeta\mapsto\zeta-1$. 称 L'_j 为 f 在 0 点的排斥花瓣. 所有吸引花瓣与排斥花瓣之并再加上$\{0\}$，即 $\bigcup\limits_{j=1}^{k}(L_j\cup L'_j)\cup\{0\}$ 形成 0 的一个邻域.

综上所述，我们有下述 Leau-Fatou 花瓣定理.

定理 2.9 设 $f(z)$由(2.6)式给出，则存在 $2k$ 个单连区域 L_j 与 L'_j $(j=1, 2, \cdots, k)$，它们以 0 为公共边界，在 0 点有顶角 $\alpha>\frac{\pi}{k}$，围绕 0

点交替排列，且存在共形映射 $\varphi_j: L_j \mapsto R_{x,a}$，$\phi_j: L'_j \mapsto R_{x,a}$，$\varphi_j(0) = \phi_j(0) = \infty (j = 1, 2, \cdots, k)$，使得：在 L_j 内 $\varphi_j \circ f(z) = \varphi_j(z) + 1$；在 L'_j 内，$\phi_j \circ f(z) = \phi_j(z) - 1$.

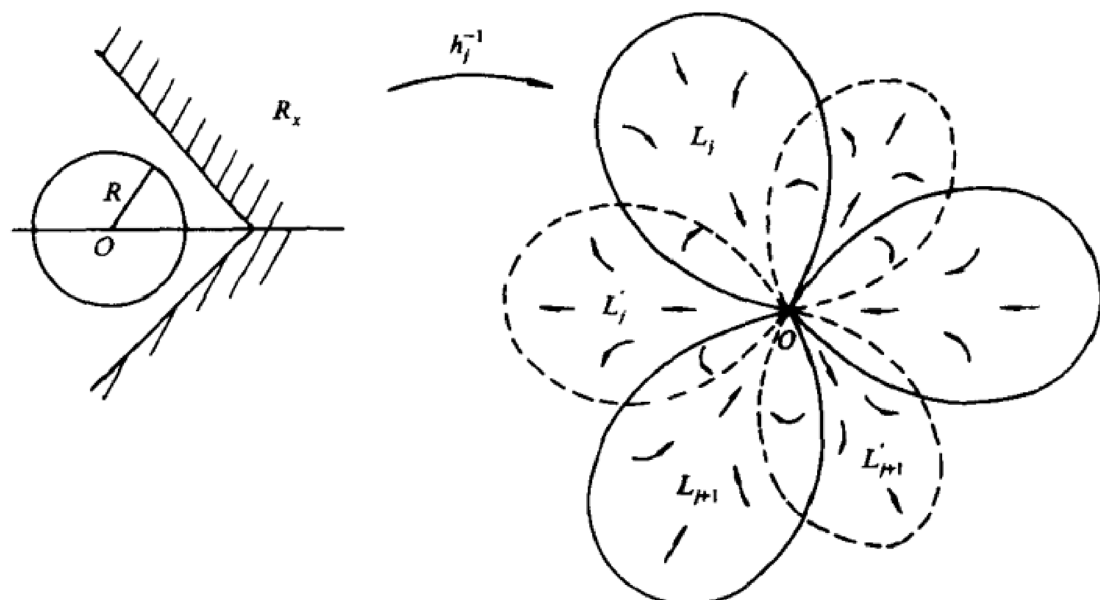


图 2.2 吸引花瓣与排斥花瓣 ($k = 3$)

利用吸引花瓣的共形共轭模型，我们有：每个花瓣 L_j 是 f-不变的，且 $f(\overline{L}_j) \subset L_j \cup \{0\}$，$f^n$ 在 L_j 内局部一致收敛于 0. 进一步，在 L_j 内定义等价关系 $\sim$：$z \sim f(z)$，对应于 $R_{x,a}$内的等价关系 $\zeta \sim \zeta + 1$，因而，商空间 $L_j/\sim \approx R_{x,a}/\sim$ 为一个两端无限的圆柱，通常称为 Ecallé 圆柱.

注 由于 $R_{x,a}$中的 a 是任取的，因此吸引和排斥花瓣可取得相邻两吸引花瓣（或排斥花瓣）的边界在点 0 是相切的.

现在考虑 $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$，$(p, q) = 1$，这时 $f^q(z)$在 0 点有展开式：

$$f^q(z) = z + bz^{l+1} + o(|z|^{l+1}) \quad (|z| \to 0),$$

因此，f^q 在 0 点有 l 个吸引花瓣 $L_i (i = 1, 2, \cdots, l)$. 取 L_i 充分小，f^j $(1 \leqslant j < q)$ 在 L_i 上共形. 固定某个 L_i，考虑 $f^j(L_i)$，它近似地将 L_i 旋转一个角度$\dfrac{2\pi pj}{q}$. 由于 $f^j \circ f^q = f^q \circ f^j$，因此 $f^j(L_i)$ 也是 f^q 的一个吸引花瓣. 适当调整花瓣大小，可假设 $f^j(L_i)$为某个花瓣 $L_{i_j} \in \{L_i\}_{i=1}^{\infty}$，

这样，我们得到一个吸引花瓣循环 $L_{i_0} = L_i \overset{f}{\mapsto} L_{i_1} \overset{f}{\mapsto} \cdots \overset{f}{\mapsto} L_{i_{q-1}} \overset{f}{\mapsto} L_{i_0}$，而 l 个吸引花瓣可分成 s 组，即 $l = sq$. 不同的两组花瓣循环中的花瓣围绕 0 点交替排列.

定理 2.10 设 f 由(2.1)式给出，其中 $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$，$(p, q) = 1$，那么，$f$ 在 0 点有 sq 个吸引花瓣，构成 s 组吸引花瓣循环. 同样，f 在 0 点有 sq 个排斥花瓣，构成 s 组排斥花瓣循环.

现在设 z_0 是有理函数 R 的有理中性不动点，乘子 $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ $(p, q) = 1$，那么，围绕 z_0 有 sq 个吸引花瓣 $L_j (j = 1, 2, \cdots, sq)$，每个花瓣 L_j 是 R^q 不变的(即 $R^q(L_j) \subset L_j$)，且 $R^{qn}(z)$ 在 L_j 内局部一致收敛于 z_0，记$A_j(z_0)$为包含 L_j 的 Fatou 分支，那么，$R^q(A_j(z_0)) = A_j(z_0)$，$R^{qn}(z) \to z_0 (n \to \infty)$，$z \in A_j(z)$. 由于在 z_0 周围还有排斥花瓣，故 $\{R^{qn}\}$在 z_0 的邻域内不能局部一致收敛于 z_0，因此 $z_0 \in J(R)$，从而 $z_0 \in \partial A_j(z_0)$，称$A_j(z_0)$为 R 在 z_0 点的抛物分支(也称抛物稳定域或抛物盆). 显然 $A_j(z_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^{-qn}(L_j)$，这里 $R^{-qn}(L_j)$取包含 L_j 的分支，利用 Abel 方程，与吸引分支一样，容易证明下面的定理.

定理 2.11 设 z_0 是 R 的有理中性不动点，有乘子 $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$，$(p, q) = 1$，$A(z_0)$ 是 z_0 的抛物分支，那么，存在解析映射 φ：$A \mapsto \mathscr{C}$，$\varphi(z_0) = \infty$，满足 Abel 方程：

$$\varphi \circ R^q(z) = \varphi(z) + 1. \tag{2.10}$$

定理 2.11 的证明留给读者.

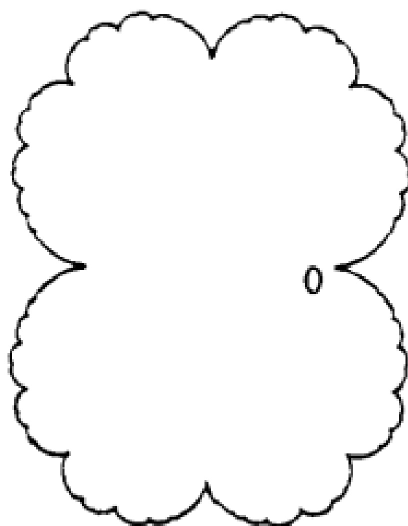


图 2.3 映射 $f(z) = z + z^2$ 的 Julia 集，0 是一个乘子为 1 的有理中性不动点

注意到，有 q 个抛物分支 $A_0 = A(z_0)$，A_1，$\cdots$，A_{q-1} 以 z_0 为边界点，它们构成一个循环(对应于花瓣循环)，例如，多项式 $f(z) = z + z^2$ 在 0 点有一个有理中性不动点，其乘子为 1，故恰有一个抛物分支，它是一个不变分支，如图 2.3 所示. 即 $f(A_i) = A_{i+1}$，$f(A_{q-1}) = A_0$，

$i = 0, \cdots, q-2$.

推论 2.7 每个抛物分支的循环至少包含 R 的一个临界点.

证明 否则,$\varphi: A(z_0) \mapsto \mathscr{C}$是一覆盖,但 $A(z_0)$是双曲区域,这是矛盾的,从而该推论得证. 证毕.

定理 2.12 有理函数 R 的吸引的,超吸引的及抛物的 Fatou 分支或者是单连通的,或者是无穷连通的.

证明 设 D 是吸引、超吸引或抛物分支. $R^p: D \mapsto D$,那么,由超吸引周期点本身是 R^p 的临界点以及推论 2.5 和推论 2.6,D 内至少包含 R^p 的一个临界点,因此 $R^p: D \mapsto D$ 是 m 层分支覆盖,$\infty > m \geqslant 2$. 设 D 是 n 连通区域,$1 \leqslant n < \infty$,则 Euler 示性数 $\chi(D) = 2-n$ 由 Riemann-Hurwitz 公式,$2-n = m(2-n) - \sum(k_j - 1)$,这里 $k_j \geqslant 2$ 为分支指标,因此 $(m-1)(n-2) = -\sum(k_j - 1,)$ 此式仅当 $n=1$ 时可能成立,即 D 只能是单连通的. 证毕.

§2.4 周期点的局部动力学(二) Siegel 盘和 Cremer 点

§2.4.1 Siegel 盘

最后我们讨论无理中性周期循环附近的局部动力学,这种情况较为复杂,无理中性周期循环可以属于 Fatou 集,也可以属于 Julia 集,这将归结为局部线性化问题.

定理 2.13 设 $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$, $|\lambda| = 1$,那么,下述条件等价:

1) $\{f^n\}$在 0 的某个邻域内正规;

2) 存在 0 的邻域 U 及共形映射 $\varphi: U \mapsto \Delta_r (r > 0)$,使得 f 满足 Schröder 方程:

$$\varphi \circ f(z) = \lambda \varphi(z) \tag{2.11}$$

证明 2)⇒1)显然,下面证明 1)⇒2).

若$\{f^n\}$在 0 点正规,那么由等度一致连续性,对 0 点的充分小邻域

W，$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W)$ 也是一个充分小的 0 点邻域，且可使得 V 落于 f 的定义域内，因此，$f: V \mapsto V$. 考虑 V 的万有覆盖 $\pi: \Delta \mapsto V, \pi(0) = 0$，那么，$f$ 可提升为解析映射 $g: \Delta \mapsto \Delta, g(0) = 0$. 又 $|g'(0)| = |\lambda| = 1$，由 Schwartz 引理，$g(z) = \lambda z$，取 r 充分小，使得 $\pi: \Delta_r \mapsto U = \pi(\Delta_r)$ 是单叶的，那么，$\varphi = \pi^{-1}$ 即为所求，证毕.

推论 2.8 R 的中性周期轨道 $\{z_0, \cdots, z_{p-1}\} \subset F(R)$ 的充要条件是 R^p 在 z_j 的邻域内共形共轭于旋转 $z \mapsto \lambda z$. 特别地，有理中性周期轨道在 Julia 集内.

定义 2.11 设 z_0 是 R 的无理中性周期点，周期为 p，乘子 $\lambda = e^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathscr{R} \backslash \mathscr{Q}$ 是无理数，若 $z_0 \in F(R)$，则称 z_0 为 Siegel 点，而包含 z_0 的 Fatou 分支称为 Siegel 盘；若 $z_0 \in J(R)$，则称 z_0 为 Cremer 点.

推论 2.9 Siegel 盘 D 是单连通的，且 $R^p: D \mapsto D$ 共形共轭于单位圆盘 Δ 上的旋转 $z \mapsto \lambda z$.

证明 不妨设 D 包含的 Siegel 点为 0，乘子 $\lambda = e^{2\pi i\theta}$，在定理 2.13 的证明中可取不变区域 $V = D$，我们要证明覆盖映射 $\pi: \Delta \mapsto D$ 是同胚，这只要证明 $\pi^{-1}(0) = \{0\}$. 事实上，若有 $z_0 \in \pi^{-1}(0), z_0 \neq 0$，则对任意 n，$\lambda^n z_0 \in \pi^{-1}(0)$，但 $\lambda = e^{2\pi i\theta}$，$\theta$ 是无理数，故 $\{\lambda^n z_0\}_{n=0}^{\infty}$ 在圆周 $\{z \mid |z| = |z_0|\}$ 上稠密，这与 $\pi^{-1}(0)$ 是离散的矛盾. 证毕.

下面证明 Siegel 盘是存在的.

定理 2.14 设 $f_\lambda(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$，$\lambda = e^{2\pi i\theta}, \theta \in [0, 1]$，那么，对几乎所有的 $\theta \in [0, 1]$，$f_\lambda(z)$ 在 0 点的邻域内共形共轭于旋转 $z \mapsto \lambda z$.

证明 这里，我们仅对 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ 证明定理.

先考虑 $\lambda \in \Delta \backslash \{0\}$，则由 Koenigs 定理，存在解析映射 $\varphi_\lambda: A_\lambda(0) \mapsto \mathscr{C}$，使得 $\varphi_\lambda \circ f_\lambda(z) = \lambda \varphi_\lambda(z)$. 这里 $A_\lambda(0)$ 是 f_λ 的 0 点的直接吸引域，$\varphi_\lambda(z) = \lim_{k \to 0} f_\lambda^k(z)/\lambda^k$. 从 Koenigs 定理的证明可以看出，上述极限关于 λ 是局部一致的，故 φ_λ 解析依赖于参数 λ. 又 f_λ 有唯一的临界点 $-\dfrac{\lambda}{2}$，则由推论 2.5，$-\dfrac{\lambda}{2} \in A_\lambda(0)$. 记 $\rho = \left|\varphi_\lambda\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)\right|$，$\Delta_\rho = \{z \mid |z| <$

$\rho\}$，U_λ 是 $\varphi_\lambda^{-1}(\Delta_\rho)$ 的包含 0 的分支，那么，φ_λ 是 $U_\lambda \mapsto \Delta_\rho$ 的共形映射. 现在考虑映射 $\eta: \lambda \mapsto \eta(\lambda) = \varphi_\lambda\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$，$\lambda \in \Delta_1 \backslash \{0\}$，那么 $\eta(\lambda)$ 是 λ 的解析函数，显然它是非零的，而且，$\eta(\lambda)$ 还是有界的. 事实上，当 $|z| > 2$ 时，$|f_\lambda(z)| > |z|$，$|f_\lambda^n(z)| \to \infty (n \to \infty)$，因此，$U_\lambda \subset \Delta_2 = \{z \mid |z| < 2\}$. 另一方面，$\varphi_\lambda^{-1}: \Delta_\rho \mapsto U_\lambda \subset \Delta_2$ 是共形映射，且 $(\varphi_\lambda^{-1})'(0) = 1$，由 Schwartz 引理，$\rho = |\eta(\lambda)| < 2$，可知，0 是 $\eta(\lambda)$ 的一个可去奇点，因此，$\eta(\lambda)$ 可解析开拓为 Δ 上的有界解析函数. 这样，我们可以利用 F. 和 M. Riesz 定理以及 Fatou 定理到 η，即：对几乎所有的 $\theta \in [0, 1)$，径向极限 $\lim\limits_{r \to 1} \eta(re^{2\pi i\theta})$ 存在，且若 θ 在一个正测度集上 $\lim\limits_{r \to 1} \eta(re^{2\pi i\theta}) = 0$，则 $\eta(\lambda) \equiv 0$，但已知 $\eta(\lambda) \neq 0$，故对几乎所有的 $\theta \in [0, 1)$，$\rho_0 = \overline{\lim\limits_{r \to 1}} |\eta(re^{2\pi i\theta})| > 0$，因此，对任何 $\rho < \rho_0$，存在序列 $\lambda_j \to \lambda = e^{2\pi i\theta} \in \partial\Delta$，使得 $\varphi_{\lambda_j}^{-1}$ 在 Δ_ρ 内有定义. 又由于 $\varphi_{\lambda_j}^{-1}(\Delta_\rho) \subset U_{\lambda_j} \subset \Delta_2$，由 Montel 定理，存在 $\{\varphi_{\lambda_j}^{-1}\}$ 的子列在 D_ρ 内局部一致收敛于解析映射 $\psi: \Delta_\rho \mapsto \mathscr{C}$，且 $\psi(0) = 0$，$\psi'(0) = 1$，在 0 点附近是共形的，取 $\varphi = \psi^{-1}$，即得 $\varphi \circ f_\lambda(z) = \lambda\varphi(z) (\lambda = e^{2\pi i\theta})$. 证毕.

注 Yoccoz 证明，若 0 是 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ 的 Siegel 点，则 0 点是任意 $f(z) = \lambda z + az^2 + \cdots$ 的 Siegel 点，因此，一个无理中性周期点是否是 Siegel 点仅与它的乘子 λ 有关，而与函数的形式无关(参见文献[Dou]).

记 $\Lambda \subset [0, 1)$ 为使 0 是 $f(z) = e^{2\pi i\theta}z + a_2z^2 + \cdots$ 的 Siegel 点的 θ 的集合，上述定理表明，Λ 的 Lebesgue 测度 $\mathrm{mes}(\Lambda) = 1$.

下面给出 $\theta \in \Lambda$ 的判别条件.

Siegel 条件 存在正常数 c 和 k，使得对任何正整数 m，n，满足：

$$\left|\theta - \frac{m}{n}\right| \geqslant c/n^k. \tag{2.12}$$

Siegel[Sie]最初证明：θ 满足 Siegel 条件，则 $\theta \in \Lambda$，且满足 Siegel 条件的 θ 的集合具有 Lebesgue 测度 1.

由 Siegel 条件，黄金比 $\theta = (\sqrt{5} \pm 1)/2 \in \Lambda$，图 2.4 给出了一个

具有 Siegel 盘的例子.

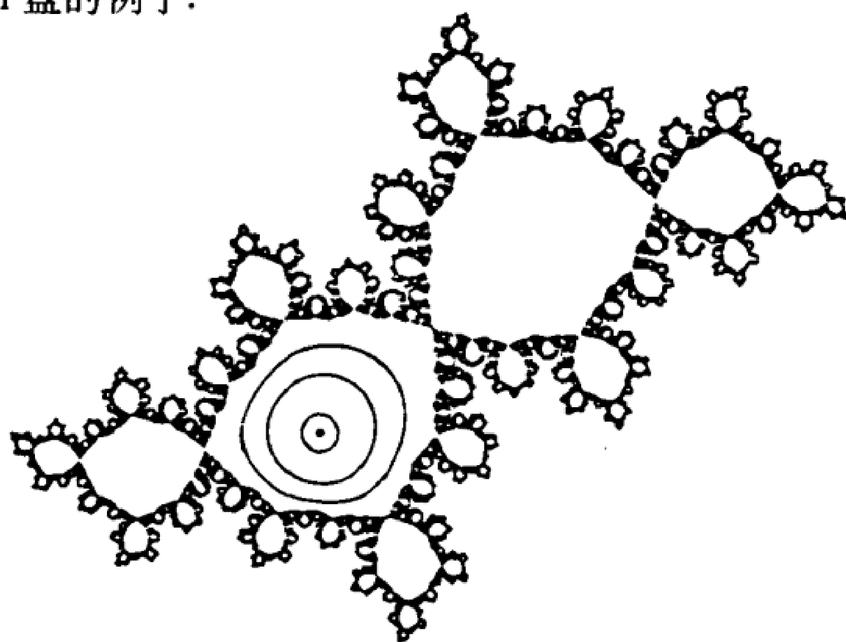


图 2.4 映射 $f(z)=z^2+e^{2\pi i\theta}z,\ \theta=(\sqrt{5}-1)/2$,
的 Julia 集,包含 0 点的 Fatou 分支是 Siegel 盘

Bryuno 条件 设 $\theta\in[0,1)$ 是无理数,则 θ 可以写成如下连分式表示:

$$\theta=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}.$$

记有理数

$$p_n/q_n=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots\cfrac{1}{a_n}}},$$

$\frac{p_n}{q_n}\to\theta(n\to\infty)$ 称为 θ 的第 n 次有理逼近,则 θ 满足 Bryuno 条件,若

$$\sum\frac{\log q_{n+1}}{q_n}<\infty. \tag{2.13}$$

Bryuno[Bry]于 1965 年证明,若 θ 满足 Bryuno 条件,则 $\theta\in\Lambda$, Yoccoz[Yoc]于 1988 年证明,Bryuno 条件还是 $\theta\in\Lambda$ 的必要条件,即有:

定理 2.15(Bryuno-Yoccoz 定理) $\theta \in \Lambda$ 当且仅当 θ 满足 Bryuno 条件(2.13).

§2.4.2 Cremer 点

下面我们证明,Cremer 点也是相当多的.

定理 2.16 设 $f_\lambda(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in [0, 1)$, 那么使得原点 O 为 f_λ 的 Cremer 点的 θ 的集合 $\Lambda^c = [0, 1)\backslash\Lambda$ 是$[0, 1)$内稠密的 G_δ 集,且 $\Lambda^c\backslash\mathscr{Q}$ 也是$[0, 1)$内稠密的 G_δ 集.

证明 设 $f_\lambda(z)$定义在 0 点的 ε-邻域内,记 $\chi_n(\lambda) = \{z \mid$ 存在 $0 \leqslant k \leqslant n$, 使得 $|f_\lambda^k(z)| > \varepsilon\}$,$d_n(\lambda)$是 $\chi_n(\lambda)$到原点的距离函数,那么,$d_n(\lambda)$是上半连续函数,进而 $d(\lambda) = \inf\limits_n d_n(\lambda)$ 也是上半连续函数,因此,$d(\lambda)$的零点集是一个 G_δ 集,由定理 2.13,$d(\lambda)$的零点集即为 Λ^c. 又由 Leau-Fatou 定理,每个有理数 $\theta \in \Lambda^c$, 故 Λ^c 在$[0, 1)$稠密. 另外,Λ^c 是一列稠密开集 Λ_m^c 的交集 $\Lambda^c = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Lambda_m^c$,而 $\Lambda_m^c \backslash \left\{ \frac{p}{q} \mid q \leqslant m \right\}$ 仍为稠密开集,故 $\Lambda^c\backslash\mathscr{Q}$ 仍是$[0, 1)$中的稠密 G_δ 集. 证毕.

Cremer 条件 如果 $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ 满足 $\varliminf\limits_{n\to\infty} |\lambda^n - 1|^{\frac{1}{n}} = 0$, 则 $\theta \in \Lambda^c$ (参见文献[Cre]),且满足 Cremer 条件的 θ 在$[0, 1)$中稠密.

由定理 2.13 及推论 2.8,在 Siegel 点的小邻域内,以至在整个 Siegel 盘上,有理函数 R 的动力学性质是清楚的,它相当于一个无理旋转. 但在 Cremer 点附近的局部动力学非常复杂,如何刻画 Cremer 点附近的局部动力学至今仍是一个人们所关心的问题,对此,Yoccoz 有如下结论:对于 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$, 如果 0 是 f_λ 的 Cremer 点,则 0 的任意充分小邻域U 都包含有 f_λ 的非零周期轨道(整个周期轨道都落于U 内). 称此性质为小轨道性质. 但对一般的解析函数来说,并非所有的 Cremer 点都有小轨道性质,关于此可参看文献[Mar].

§2.5 周期点的整体动力学

在 §2.2 中我们已证明排斥周期点在 Julia 集内,本节将证明一个

更进一步的结论：排斥周期点在 Julia 集内是稠密的，这是 Fatou-Julia 理论的主要结论之一.

先给出非排斥的周期轨道的个数估计.

引理 2.9 设 R 为有理函数，$\deg R = d \geqslant 2$，则 R 的吸引、超吸引和有理中性周期轨道的个数之和不超过 $2d-2$.

证明 若 $O(z_0) = \{z_0, \cdots, z_{p-1}\}$ 是 R 的吸引周期轨道或有理中性周期轨道，则由推论 2.6 及推论 2.7，至少存在 R 的一个临界点 c_0，使得其轨道 $R^n(c_0)$收敛于 $O(z_0)$；若 $O(z_0)$是 R 的超吸引周期轨道，则一定有某个 $z_j \in O(z_0)$，其本身就是 R 的临界点，因此，吸引、超吸引和有理中性周期轨道的总个数小于等于 R 的临界点的个数，但 R 的临界点至多为 $2d-2$ 个. 证毕.

引理 2.10 设 $\lambda_1(w), \cdots, \lambda_l(w)$是 l 个定义在 0 点邻域内的非常值解析函数，$|\lambda_j(0)| = 1(j = 1, 2, \cdots, l)$，那么，对 0 的任意充分小的邻域 W，存在 $w_0 \in W$，使得至少有 $\left[\frac{l+1}{2}\right]$个 λ_j 满足 $|\lambda_j(w_0)| < 1$.

证明 设 $\lambda_j(w) = \lambda_j(0) + b_j w^{k_j} + \cdots (b_j \neq 0)$，$j = 1, 2, \cdots, l$，考虑集合 $\{w \mid |\lambda_j(0) + b_j w^{k_j}| = 1\}$. 在 0 点附近，它由 $2k_j$ 条从 0 点出发的弧组成，将 0 的充分小邻域分成 $2k_j$ 个以 0 为顶点的扇形，每个扇形有相同的顶角 π/k_j，由此，集合 $\{w \mid |\lambda_j(w)| = 1\}$ 同样将 0 的充分小邻域划分成 $2k_j$ 个顶角为 π/k_j 的扇形. 在相邻两个扇形内，$\log|\lambda_j(w)|$ 有不同的正负号，记 $\delta_j(w) = \operatorname{sgn}\log|\lambda_j(w)|$，那么，当 $r \to 0$ 时，积分 $\int_0^{2\pi} \delta_j(re^{i\theta})d\theta \to 0$. 对 j 求和，得 $\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{l} \delta_j(re^{i\theta})d\theta \to 0$，但$\sum_{j=1}^{l} \delta_j(re^{i\theta})$ 只取整数值，故当 r 充分小时，存在一段弧 $\{w = re^{i\theta} \mid \theta_1 < \theta < \theta_2\}$，在这段弧上的 $w = re^{i\theta}$ 满足 $\sum_{j=1}^{l} \delta_j(w) \leqslant 0$，因此，至少有 $\left[\frac{l+1}{2}\right]$个 $\delta_j(w) < 0$，即 $|\lambda_j(w)| < 1$. 证毕.

定理 2.17 设 R 为有理函数，$\deg R = d \geqslant 2$，则 R 的非排斥周期轨道的个数 $\leqslant 6(d-1)$.

证明 由引理 2.9，只要证明无理中性周期轨道的个数 $\leqslant 4(d$

-1). 现设 $R(z)=P(z)/Q(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ 为多项式, $(P(z), Q(z))=1$, 考虑单参数有理函数族

$$R_w(z)=\frac{(1-w)P(z)+wz^d}{(1-w)Q(z)+w},\ w\in\mathscr{C},$$

则 $\deg R_w\leqslant\deg R=d$.

假设 R 有 $l>4(d-1)$ 个无理中性周期轨道 $O_R(z_j)$ ($j=1, 2, \cdots, l$), 周期为 p_j, 乘子为 λ_j, $|\lambda_j|=1$, 但 $\lambda_j\neq1$, 考虑方程:

$$F_j(z, w)=R_w^{p_j}(z)-z=0,$$

则 $F_j(z_j, 0)=0$, 且 $\frac{\partial F_j(z, w)}{\partial z}\big|_{(z_j, 0)}=\lambda_j-1\neq0$. 由隐函数定理, 存在 0 的邻域 W_j 及 W_j 上的解析函数 $z_j(w)$, 满足:

$$R_w^{p_j}(z_j(w))=z_j(w)\text{ 及 }z_j(0)=z_j,$$

因此, $z_j(w)$是 R_w 的周期点, 记其 $\lambda_j(w)=(R_w^{p_j})'(z_j(w))$ 为其乘子, 那么, $\lambda_j(w)$在 w_j 解析, $\lambda_j(0)=\lambda_j$. 下面证明 $\lambda_j(w)$不为常数.

如果 $\lambda_j(w)\equiv\lambda_j(w\in W_j)$, 我们证明它可以沿一曲线 α 解析开拓到 $w=1$, 这里 $\alpha:[0, 1]\mapsto\mathscr{C}$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(1)=1$. 事实上, 若$\lambda_j(w)$只能解析开拓到$\alpha(t)$, $t<1$, 则由 $\lambda_j(\alpha(t))=\lambda_j\neq1$ 仍可应用隐函数定理, 可在$\alpha(t)$的邻域内定义$\lambda_j(w)$且仍有 $\lambda_j(w)\equiv\lambda_j$, 这是矛盾的. 这样, $R_1(z)=z^d$ 有一个周期点以 λ_j 为其乘子, 但由直接验证可知, R_1 除 0 和∞为其两个超吸引不动点外, 其他周期点都是排斥的, 这就导出矛盾.

这样, 我们得到 l 个乘子函数 $\lambda_j(w)$($j=1, 2, \cdots, l$), 满足引理 2.10 的条件, 因此, 任取 0 的邻域 $W\subset\bigcap_{j=1}^{l}W_j$, 存在 $w\in W$, 使得至少有 $\left[\frac{l+1}{2}\right]\geqslant2d-1$ 个 $\lambda_j(w)$ 满足 $|\lambda_j(w)|<1$, 即 R_w 有至少 $2d-1$ 个吸引周期循环, 这与引理 2.9 矛盾. 证毕.

推论 2.10 有理函数 R 仅有有限多个非排斥周期点.

定理 2.18 有理函数 R 的 Julia 集 $J(R)$是 R 的排斥周期点集的

闭包.

证明 先证 $J(R)$包含在 R 的周期点集的聚点集内,任取一点 $z_0 \in J(R)$,且使 z_0 不为 R^2 的临界点,注意到 R^2 的临界点至多只有 $2d^2-2$ 个,这里 $d \geqslant 2$ 为 R 的度,故存在 z_0 的邻域 U,使 R^{-2}在 U 上可取到 $d^2 \geqslant 4$ 个单值分支,由此,我们可以断言:在 z_0 的任意充分小的邻域 $U_0 \subset U$ 内,存在 $z \in U_0$,使得对某个 $n \geqslant 0$, $R^n(z)=I(z)$,这里 I 为 R^{-2}在 U 上的某个单值分支. 这样, $R^{n+2}(z)=z$, z 是 R 的周期点,因此,z_0 为周期点集的聚点. 下面证明断言:若不然,任取 $I_1(z)$, $I_2(z)$, $I_3(z)$为 R^{-2}在 U 上的三个不同的单值分支,则对任意 $n \geqslant 0$, $R^n(z) \neq I_j(z)$, $z \in U_0$, $j=1, 2, 3$, 定义

$$g_n(z)=\frac{R^n(z)-I_1(z)}{R^n(z)-I_2(z)} \cdot \frac{I_3(z)-I_1(z)}{I_3(z)-I_1(z)},$$

那么,$\{g_n\}$在 U_0 内不取 0, 1 和∞三点,因此,$\{g_n\}$是 U_0 上的正规族,由此立即得$\{R^n\}$是 U_0 上的正规族,这与 $U_0 \cap J(R) \neq \varnothing$ 矛盾.

现在我们已证明了$J(R)$上除了 R^2 的临界点外都是 R 的周期点集的聚点,但$J(R)$是完全集,而 R^2 的临界点个数有限,因此,$J(R)$上每一点都是周期点集的聚点. 又因非排斥周期点也只有有限多个,以及排斥周期点本身在$J(P)$内,即得$J(R)$是 R 的排斥周期点集的闭包. 证毕.

利用上述结论,我们还可得到下面的重要结论:

定理 2.19 设 U 是开集,$U \cap J(R) \neq \varnothing$,则对$\hat{\mathscr{C}}$内任意紧集 K,只要 $K \cap E(R)=\varnothing$($E(R)$ 为 R 的例外点集),存在 n,使得 $R^n(U) \supset K$.

证明 由定理 2.18,存在排斥周期点 $z_0 \in U \cap J(R)$,设其周期为 p,取 z_0 的充分小邻域 $U_0 \subset U$,使得 $R^p(U_0) \supset U_0$,那么 $U_0 \subset R^p(U_0) \subset R^{2p}(U_0) \subset \cdots \subset R^{np}(U_0) \subset \cdots$, 但是,从定理 2.4 的证明知道 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^{np}(U_0)=\hat{\mathscr{C}} \backslash E(R) \supset K$, 因此,存在充分大的 n_0, $R^{n_0 p}(U_0) \supset K$. 同样,存在 n 充分大的 n_i, $R^{n_i p+i}(U_0) \supset K (i=0, 1, 2, \cdots, p-1)$, 因

此当 n 充分大时 $(n \geqslant \max\limits_i\{(n_i+1)p\})$, $R^n(U) \supset R^n(U_0) \supset K$. 证毕.

推论 2.11(齐性定理) 如果开集 $U \cap J(R) \neq \varnothing$, 那么,存在 n_0,当 $n \geqslant n_0$ 时, $R^n(U \cap J(R)) = J(R)$.

证明 在定理 2.19 中取 $K = J(R)$, 利用$J(R)$的完全不变性即得. 证毕.

定义 2.12 紧集 X 上的连续变换 $f: x \mapsto X$ 称为是(拓扑)混合的,如果对任意邻域 $U, V \subset X$, 存在 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时, $f^{-n}(U) \cap V \neq \varnothing$.

推论 2.12 有理函数 R 在其 Julia 集上是拓扑混合的.

利用齐性定理,我们还可对 Julia 集作某些刻画.

推论 2.13 $J(R)$没有完全不变的真闭子集.

证明 若 $J_0 \subset J(R)$是完全不变的真闭子集,则$\hat{\mathscr{C}} \backslash J_0$ 是开集,且 $(\hat{\mathscr{C}} \backslash J_0) \cap J(R) \neq \varnothing$, 这与齐性定理矛盾,此矛盾说明假设错误,从而证明了推论. 证毕.

推论 2.14 如果 $J(R)$不连通,那么它有无穷多个连通的分支.

证明 假定 $J(R)$有 $k \geqslant 2$ 个连通分支 $J_1, J_2, \cdots, J_k (k<\infty)$, 由推论 2.11,存在 n, $R^n(J_1) = J(R) = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_k$, 这样, J_1 也是不连通的,从而得出矛盾,因此,推论 2.13 成立. 证毕.

齐性定理也是一个很重要的定理,它说明了 Julia 集的局部与整体的相似性,也说明了 R 在 Julia 集上的迭代的复杂性.

参考文献

[Fa1] P. Fatou, Sur les solutions uniformes de certains e'quations fonctionnelle. *C. R. Acad. Sci. Paris* 143(1906)546-548.

[Fa2] P. Fatou, Sur les e'quations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France* 47(1919)161-271; 48(1920)33-94,208-314.

[Ju] G. Julia, Memoire sur l'iteration de fonctions rationelles. *J. Math. Pure Appl.* 8(1918)47-245.

[Sch] E. Schröder, Uber Iterirte Fonctionnelle. *Math. Ann.* 3 (1871).

[Koe] G. Koenigs, Recherches sur les integrals de certains e'quations fonctionnelles. *Ann. Sci. E'cole. Norm. Sup.* 1 (1884) 1-41.

[Böt] L. E. Böttcher. The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis. *Izv. Kazan Fiz. —Mat. Obshch* 13 (1903) 1-37; 14(1904)155-234.

[Lea] L. Leau, E'tude sur les e'quations fonctionnelles à une on plusièrs variables. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 11(1897)

[Sie] C. L. Siegel, Iteration of analytic functions. *Ann. of Math.* 43(1943)607-612.

[Ah] L. V. Ahlfors, *Complex analysis.* McGraw-Hill 1966.

[Mon] P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications.* Gauthier-Villars. Paris 1927.

[Lat] S. Lattés, Sur l'iteration des substitutions rationelles et les fonctions de Poincare. *C. R. Acad. Sci. Paris* 16 (1918)26-28.

[Bry] A. D. Bryuno, Convergence of transformations of differential equations to normal forms. *Dokl. Akad. Nauk, USSR* 165(1965)987-989.

[Dou] A. Douady, Disques de Siegel et anneaux de Hermann, *Asterisque* 152/153(1087) 151-272.

[Yoc] J. -C. Yoccoz, Linearisation des germes de difféomorphismes holomorphes de ($\mathscr{C}$, 0). *C. R. Acad. Sci. Paris* 36 (1988)55-58.

[Cre] H. Cremer, Zum Zentrumproblem, *Math. Ann.* 98 (1927) 151-168.

[Cre] H. Cremer, Über die Häufigkeit der Nichtzentren. *Math.*

Ann. 15 (1938) 573-580.

[Mar] R. Perez-Marco, *Sur la dynamique des germs de difféomorphismes holomorphes de* ($\mathscr{C}$, 0) *et des difféomorphismes analytiques du cercle. Thèse de Doctrat*, Université de Paris-Sud. d'Orsay, France 1990.

第三章　Fatou 集的动力学

在前一章中，我们讨论了有理函数动力系统的经典的 Fatou-Julia 理论，这一章我们将集中讨论 Fatou 集的动力学.

设 R 是度为 $d \geqslant 2$ 的有理函数，$F = F(R)$ 是 R 的 Fatou 集，$J = J(R)$ 是其 Julia 集，我们将分别讨论 R 在$F(R)$与$J(R)$上的动力学性质. 在$F(R)$上，R 有较为稳定的动力学性质，而在$J(R)$上，R 的动力学极为复杂. 本章将给出 R 在$F(R)$上的动力学的完全描述，这是 D. Sullivan 在 1982 的著名工作.[Su1,Su2]同时，也将对 Fatou 集的结构进行描述.

§3.1　Fatou 分支的基本性质

已知 $F(R)$是开集，且是 R-完全不变的，即 $R^{-1}(F) = F = R(F)$. 设 D 是 $F(R)$的一个分支(称为 Fatou 分支)，则$R(D)$包含在$F(R)$的某个分支 V 内，又由于$J(R)$也是完全不变的，因此 $R(\partial D) \subset \partial V$. 由引理 2.2，$R(D) = V$，且 $R: D \mapsto V$ 是分支覆盖. 另一方面，考虑逆像 $R^{-1}(D)$，若记 B 是与$R^{-1}(D)$相交的 Fatou 分支，则 $R(B) \subset D$，因而 $R(B) = D$，所以，我们得到：若 D 是 $F(R)$的一个分支，则$R(D)$也是一个 Fatou 分支，$R^{-1}(D)$的每个连通分支都是 Fatou 分支.

记 $\mathscr{F}_R$ 是$F(R)$的所有分支组成的集类，那么，由上讨论，R 诱导了一个 $\mathscr{F}_R$ 到 $\mathscr{F}_R$ 的映射 $\hat{R}: \mathscr{F}_R \mapsto \mathscr{F}_R$，$D \mapsto R(D)$.

定义 3.1　一个 Fatou 分支 $D \in \mathscr{F}_R$ 称为是周期的，如果它是 $\hat{R}$ 的一个周期点，即存在 $n > 0$，使得 $R^n(D) = D$ 的最小的 n 称为 D 的周期，$\{D, R(D), \cdots, R^{n-1}(D)\}$称为 Fatou 分支的一个循环. 如果存在

$k \geqslant 0$，使得$R^k(D)$是周期的，则称 D 为最终周期的. 如果 D 是最终周期的但不是周期的，则称 D 为严格最终周期的.

一个 Fatou 分支 $D \in \mathscr{F}_R$ 如果不是最终周期的，则称 D 是游荡的. 此时，对任意 $m, n \geqslant 0, m \neq n, R^m(D) \cap R^n(D) = \varnothing$.

早在本世纪初，Fatou 就猜想，对有理函数来说，不存在游荡的 Fatou 分支. 这个猜想直到 80 年代 Sullivan 引进了有理函数的拟共形形变才获得证明.

定理 3.1（Sullivan 最终周期性定理） 设 R 是度为 $d \geqslant 2$ 的有理函数，那么 R 的每个 Fatou 分支 $D \in \mathscr{F}_R$ 都是最终周期的，即 R 没有游荡的 Fatou 分支.

定理的证明相当复杂，我们留在本章 § 3—§ 5 进行. 由此定理可知，要考虑 R 在 Fatou 集上的动力学性质，则只要考虑 R 在$F(R)$的周期分支上的动力学性质. 注意到$J(R)$是完全集，每个周期分支是双曲型 Riemann 区域，因此第一章的结论有助于我们了解 R 在周期分支上的动力学. 我们将在下一节讨论之.

现在先讨论 Fatou 分支的一些拓扑性质.

定理 3.2 设 R 有一个 Fatou 分支 $D \in \mathscr{F}_R$ 是完全不变的，即 $R^{-1}(D) = D = R(D)$，那么

1）所有其他的 Fatou 分支都是单连通的；

2）R 的 Julia 集 $J(R) = \partial D$；

3）R 至多只有两个完全不变的 Fatou 分支.

证明 1）设 $B \in \mathscr{F}_R$ 是不同于 D 的 Fatou 分支，任取一条简单闭曲线 $\gamma \subset B$，则 γ 的两个余分支之一 V 与 D 不相交. 由于 D 是完全不变的，对任意 $n \geqslant 0$，$R^n(V)$与 D 不相交，由 Montel 定理，$V \subset F(R)$，因此，$V \subset B$，这就说明了 γ 可在 B 内收缩于一点，即 B 是单连通的.

2）注意到 $\partial D \subset J(R)$ 及 ∂D 在 R 下也是完全不变的，由推论2.13即得.

3）首先 $R: D \mapsto D$ 是一个 d 层的分支覆盖，若 R 有不只一个完全不变的 Fatou 分支，则由 1)，每个分支都是单连通的. 利用 Riemann-Hurwitz 公式，每个完全不变分支包含 $d-1$ 个 R 的临界点，但

R 至多只有 $2d-2$ 个临界点，因此完全不变分支不超过两个.

证毕.

定理 3.3 设 $m \subset \mathscr{F}_R$ 是由 R 的 Fatou 分支组成的子族，且在 $\hat{R}$ 下是完全不变的(即 $B=\bigcup_{D\in m} D$ 是 R 的完全不变子集)，那么，m 由一个、两个或可列无穷多个 Fatou 分支组成.

证明 假设 m 只含有有限多个 Fatou 分支，那么，$\hat{R}$ 在 m 上是双射(一一到上的)，因此，存在 $n\geqslant 0$，使 $\hat{R}^n = id$，这就说明了每个 Fatou 分支 $D\in m$ 都在 $G=R^n$ 下是完全不变的. 注意到 G 仍是有理函数，由定理 3.2，m 至多只能包含两个 Fatou 分支. 证毕.

推论 3.1 如果 $F(R)$ 非空，那么，$F(R)$ 有一个、两个或可列无穷多个分支.

两个分支 $D_1, D_2 \in \mathscr{F}_R$ 称为等价的，如果存在 $m, n\geqslant 0$，使得 $R^m(D_1)=R^n(D_2)$，这是一个等价关系. $D\in \mathscr{F}_R$ 的等价类称为 D 的大轨道，记为 $GO_R(D)$ 或 $GO(D)$. 显然，$GO(D)$ 是完全不变的.

推论 3.2 如果 D 的大轨道是有限的，则 D 是完全不变的，或在 R^2 下是完全不变的.

在第二章 §2.2 中给出的例子说明了 Fatou 集可以是空集、有一个 Fatou 分支、有两个完全不变分支或有两个分支属于同一大轨道(对应于 Lattés 的例子及 $P(z)=z^2-2$，$P(z)=z^d$ 及 $P(z)=z^{-d}$)，下面再举几个例子.

例 3.1 设 $P(z)$ 是一个 d 次多项式，这时，∞ 是 P 的一个超吸引不动点，记 $D=A(\infty)$ 是 ∞ 的超吸引盆，那么，由于 $P^{-1}(\infty)=\infty$，D 是 P 的完全不变 Fatou 分支，且 $J(P)=\partial D$，因此 $F(P)$ 的任何有界分支都是单连通的. D 的余集称为填充 Julia 集，它是多项式动力系统研究的主要对象之一.

例 3.2 如果有理函数 R 有一个 Siegel 盘 D，由于 R 在 Siegel 盘上是单射，故 $R^{-1}(D)$ 至少有一个不同于 D 的分支，这样包含 D 的大轨道 $GO(D)$ 不能是有限轨道，因此，R 有无穷多个 Fatou 分支，函数

$R_\lambda(z) = \lambda z(1 - z)$ 当 $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ 且 θ 满足 Siegel 条件时(例如 $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$)有一个 Siegel 盘,因而有可列无穷多个 Fatou 分支(见图 2.4).

例 3.3 设 $P(z) = z^2 - 1$,则$\{0, -1\}$形成 P 的一个周期为 2 的超吸引周期轨道,记$D(0)$与$D(-1)$分别是包含 0 与 -1 的 Fatou 分支,则 $P: D(-1) \mapsto D(0)$是单叶的,$P^{-1}(D(0))$有另一连通分支 $D \neq D(-1)$. 同上例,$GO(D(0))$由无穷多个分支组成. 以后,我们可以看到 $F(P) = A(\infty) \cup \bigcup_{D \in GO(D(0))} D$. 这里 $A(\infty)$是∞的超吸引分支. 本例给出了 Julia 集和 Fatou 集的典型例子(见图 3.1).

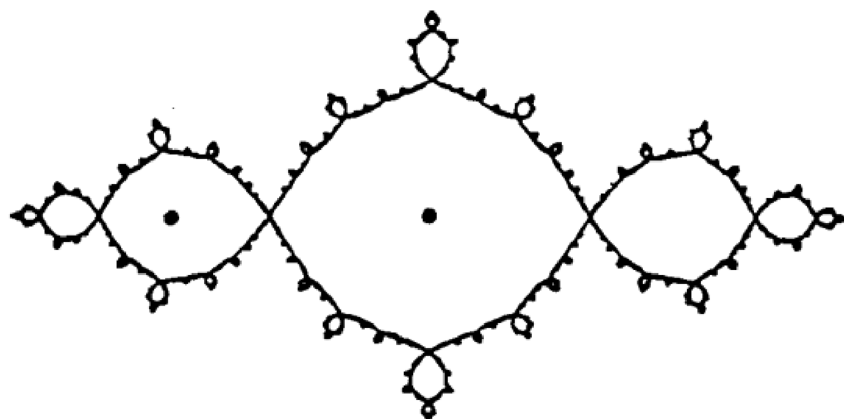


图 3.1 映射 $f(z) = z^2 - 1$ 的 Julia 集,$\{0, -1\}$是一个超吸引周期轨道

§ 3.2 周期分支的动力学描述,Herman 环

设 R 是度为 $d \geqslant 2$ 的有理函数,考虑$F(R)$的周期分支. 在第二章中,我们从周期点的局部动力学出发得到了一些周期分支的动力学性质,下面的 Sullivan 分类定理,给出了$F(R)$的周期分支的完全描述. 鉴于周期为 p 的周期分支是 R^p 的不变分支,我们只要考虑不变分支就可以了.

定理 3.4[Su2] 设 R 是有理函数,$\deg R \geqslant 2$. 如果 D 是 R 的不变 Fatou 分支(即 $R(D) = D$),那么,D 为下列五种情形之一(图 3.2):

1) 吸引的:存在 R 的吸引不动点 $z_0 \in D$, 其乘子 λ 满足 $0 <$

$|\lambda| < 1$，R^n 在 D 内局部一致收敛于 z_0；

2）抛物的：存在 R 的有理中性不动点 $z_0 \in \partial D$，乘子 $\lambda = 1$，R^n 在 D 内局部一致收敛于 z_0；

3）超吸引的：存在 R 的超吸引不动点 $z_0 \in D$，乘子 $\lambda = 0$，R^n 在 D 内局部一致收敛于 z_0；

4）Siegel 盘：D 共形等价于单位圆盘 Δ，而 R 共形共轭于 Δ 上的无理旋转 $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$，$z \in \Delta, \theta \in \mathscr{R}\backslash\mathscr{Q}$；

5）Herman 环：D 共形等价于环域 $A(r,1) = \{z \mid 0 < r < |z| < 1\}$，而 R 共形共轭于无理旋转 $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$，$z \in A(r, 1), \theta \in \mathscr{R}\backslash\mathscr{Q}$.

证明 由于 $J(R)$ 是完全集，∂D 至少包含三个点，故 D 是一个双曲 Riemann 区域. 利用定理 1.4 到 $R: D \mapsto D$，我们可知 R 仅有四种情形发生：a）R^n 在 D 内局部一致收敛到 R 的不动点 $z_0 \in D$，其乘子必有 $|\lambda| < 1$. 若 $0 < |\lambda| < 1$，则 D 为吸引分支；若 $\lambda = 0$ 则 D 为超吸引分支. b）R^n 在 D 内局部一致趋向于 D 的边界，此时，R 及 D 满足定理 1.5 和引理 1.6 的条件，因此 R^n 在 D 内局部一致收敛于不动点 $z_0 \in \partial D$，且其乘子 λ 或者 $|\lambda| < 1$，或者 $\lambda = 1$，但由 $\partial D \subset J(R)$，$|\lambda| < 1$ 是不可能的，故 D 为抛物分支. c）存在 n，使在 D 内 $R^n = id$，但导出 $R^n \equiv id$ 是不可能的，因为 $\deg R^n = d^n \neq 0$. d）D 共形等价于 $\Delta, \Delta^* = \Delta\backslash\{0\}$ 或 $A(r, 1)$，而 R 共形共轭于一无理旋转. 若 D 共形等价于 Δ，则 D 即为 Siegel 盘；若 D 共形等价于 $A(r, 1)$，则 D 为 Herman 环，而此时 D 不可能共形等价于 Δ^*，否则 ∂D 有一个孤立的边界点（对应于 0），这与 $J(R)$ 是完全集矛盾. 至此，定理证毕.

推论 3.3 周期 Fatou 分支或者是单连通的，或者是二连通的，或者是无穷连通的.

证明 这是本定理与定理 2.12 的直接推论. 证毕.

下面对上述五类不变分支作些描述.

1）D 是吸引分支. 考虑大轨道意义下的等价关系，$x \sim y$ 当且仅当 x 和 y 属于同一大轨道，由吸引不动点的局部模型，存在分支覆盖 φ：$D \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，满足 $\varphi \circ R(z) = \lambda\varphi(z)$，$\varphi(z_0) = 0$，分支点是 R 的临界点的逆

轨道，D 内在～下的等价点对应于$\hat{\mathscr{C}}$内在 $z \mapsto \lambda z$ 下的等价点，因此，若记$[z_0]$是不动点的等价类，则 $D\backslash[z_0]/\sim\approx\mathscr{C}^*/z \mapsto \lambda z$，这是一个环面 T，具有复模 λ. 投影 $\pi: D \mapsto T$ 的分支点是 R 的临界点的大轨道，π(或～)的基本区域在 z_0 点附近是环域.

2) D 是抛物分支. 此时存在分支覆盖 $\varphi: D \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，满足 Abel 方程 $\varphi \circ R(z) = \varphi(z) + 1$. 分支点是临界点的逆轨道，$D$ 内在～下的等价点对应于$\mathscr{C}$内在平移 $z \mapsto z+1$ 下的等价点，故 $D/\sim\approx\mathscr{C}/z \mapsto z+1$ 是一个两端无限伸长的柱面，称为 Ecallé 圆柱，它对应于 D 内的基本区域在 z_0 附近是两端点重合于 z_0 的月牙形区域.

3) D 是超吸引分支. 此时 D 在～下没有基本区域，考虑等价关系 $\approx$，$x \approx y$ 当且仅当存在 n，使得 $R^n(x) = R^n(y)$. $\approx$的等价类的闭包决定了 D 内的层状(foliation)结构，每个等价类的闭包$\overline{[x]}$称为一张叶片(leaf). 在不动点 z_0 附近，$\overline{[x]}$是一条围绕 z_0 的简单闭解析曲线.

4) D 是 Siegel 盘或 Herman 环：任一点的前向轨道的闭包决定了它们的层状结构，且每张叶片对应于 Δ 或 $A(r, 1)$内在无理旋转 $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$下的不变圆周，因而这是解析 Jordan 闭曲线.

在有理函数族的结构稳定性讨论中，我们要用到周期分支的上述描述(见第五章)，图 3.2 描述了五类分支的结构.

吸引、超吸引和抛物分支以及 Siegel 盘都与一个周期点相联系，而对周期点的局部动力学性质的讨论(第二章 § 2.3，§ 2.4)说明了它们都是可能存在的. 下面我们构造一个具有 Herman 环的有理函数，它首先是由 Herman 利用单位圆周上解析自同胚给出的.

设 $f: S^1 = \mathscr{R}/\mathscr{Z} \mapsto S^1$ 是保向同胚，那么 f 有唯一的提升$\tilde{f}: \mathscr{R} \mapsto \mathscr{R}$，满足 $\tilde{f}(\theta+1) = \tilde{f}(\theta) + 1$，$\theta \in \mathscr{R}$. 定义$\tilde{f}$的旋转数 $\mathrm{Rot}(\tilde{f}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tilde{f}^n(\theta)}{n}$，及 f 的旋转数 $\mathrm{rot}(f) = \mathrm{Rot}(\tilde{f})\mathrm{mod}1$，可以证明 f 的旋转数存在且与初值 θ 的选取无关(参见文献[Ar])，而且它是一个拓扑共轭下的不变量，即对任意保向同胚 $h: S^1 \mapsto S^1$，$\mathrm{rot}(h \circ f \circ h^{-1}) = \mathrm{rot}(f)$. 下面的 Anold-Herman 定理是构造具有 Herman 环的有理函

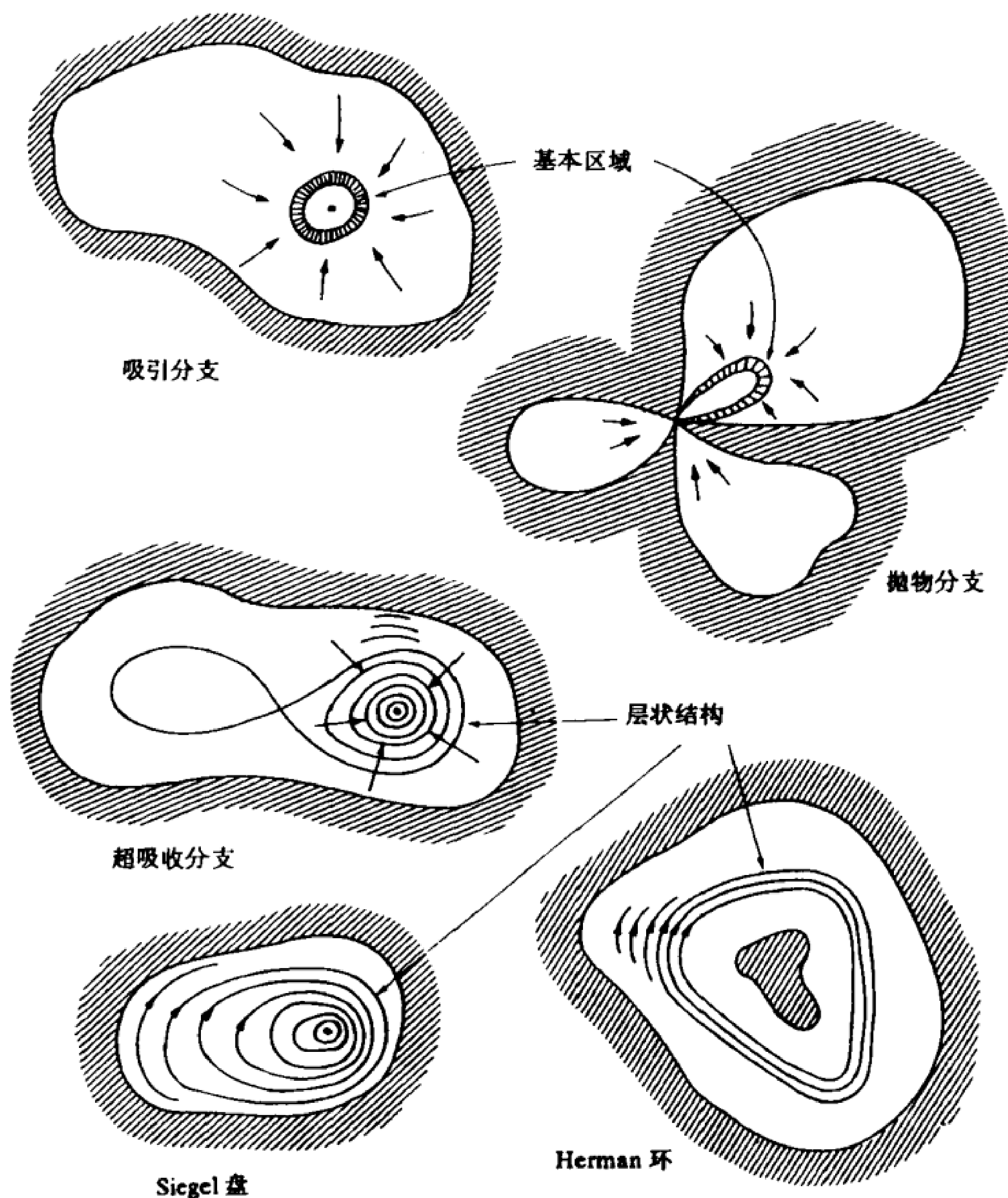


图 3.2　五类周期分支

数的基础.

定理 3.5(Anold-Herman 定理)　设 $f: S^1 = \mathscr{R}/\mathscr{Z} \mapsto S^1$ 是实解析自同胚,如果 f 的旋转数 $\alpha = \mathrm{rot}(f)$ 满足 Siegel 条件(2.12),那么,存在 S^1 上实解析同胚 h,使得 $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \mathrm{e}^{2\pi i \alpha} z, z \in S^1$.

定理的证明可参见文献[Her, Yoc].

例 3.4 设

$$R(z) = e^{2\pi i\theta} z^2 \frac{1 - \bar{a}z}{z - a},$$

这里 a 充分接近于零，那么，选取适当的 θ, $R(z)$ 具有一个 Herman 环.

首先，R 将 S^1 映到 S^1 上. 又当 $a \to 0$ 时，$R(z)$ 限制在 S^1 上趋向于旋转 $z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$，故当 a 充分小时，$R|_{S^1}$ 是一个保向的实解析同胚，可以证明，$R|_{S^1}$ 的旋转数 α 是 θ 的单调连续函数. 选取适当的 θ，使得 α 满足 Siegel 条件(2.12)，则由 Anold-Herman 定理，存在 S^1 上实解析同胚 $h: S^1 \mapsto S^1$，使得 $h \circ R \circ h^{-1}(z) = e^{2\pi i\alpha} z, z \in S^1$. 由于 h 是实解析的，因此它可以解析开拓为 S^1 的邻域 A 内的解析函数(A 为包含 S^1 的环域)，由唯一性，当 $z \in A$ 时，仍有 $h \circ R \circ h^{-1}(z) = e^{2\pi i\alpha} z$，因此 A 包含在 $F(R)$ 的一个不变分支 D 内，由定理 3.4，D 只可能是 Siegel 盘或 Herman 环，但由于 A 的有界余分支内有 R 的极点 a，在无界余分支内有零点 $1/\bar{a}$，故 A 不能位于 R 的 Siegel 盘内，因此，D 是 Herman 环.

具体地，我们可取 $a = \frac{1}{4}$, $\theta = 0.6151732\cdots$ (使得旋转数为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$)，此时 R 有 Herman 环，见图 3.3.

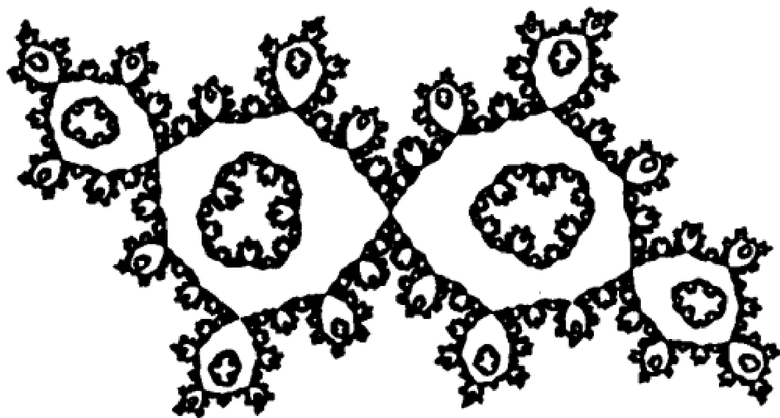


图 3.3 映射 $f(z) = e^{2\pi i\theta} z^2 (z - 4)/(1 - 4z)$ $(\theta = 0.6151732\cdots)$ 的 Julia 集，其 Fatou 集拥有一个 Herman 环

由 §2.3 的讨论知，吸引分支、超吸引分支和抛物分支的循环(通常分别称为吸引循环、超吸引循环和抛物循环)均包含至少一个临界

点. 下面讨论 Siegel 盘和 Herman 环与临界点的关系，为此，我们需要下述引理 3.1.

设 $V \subset \hat{\mathscr{C}}$ 是单连通区域，用 R_j^{-m} 表示 R^{-m}在 V 内的某个分支(可能多值)，称为 R 在 V 内的一个逆迭代分支.

引理 3.1 设$\{R_j^{-m}\}_{m,j}$是区域 V 内的逆迭代分支序列，若每个 R_j^{-m} 在 V 内都是单值解析的，则

1) $\{R_j^{-m}\}$是 V 上的正规族；

2) 如果又有 $V \cap J(R) \neq \varnothing$，那么，每个收敛子列$\{R_{j_k}^{-m_k}\}_R$ 在 V 上局部一致收敛于常值函数. 特别地，对任意紧集 $K \subset V$，$R_j^{-m}(K)$的直径 $\mathrm{diam}(R_j^{-m}(K))$收敛于 0.

证明 1) 对任意 $z \in V$，取其充分小邻域U，使得 U 不含有某一个周期大于 2 的周期轨道，那么，$R_j^{-m}(U)$与这一周期轨道不相交. 由 Montel 定理，$\{R_j^{-m}\}$在 U 内正规，从而在 V 内正规.

2) 如果$\{R_{j_k}^{-n_k}\}$在 V 内收敛但不是收敛于常值函数，则收敛于一非常值解析函数 g，记 $W = g(V)$，那么由 $V \cap J(R) \neq \varnothing$ 得 $W \cap J(R) \neq \varnothing$. 取 $z \in W \cap J(R)$ 及 z 的充分小邻域 $W_0 \subset W$，则当 k 充分大时，$R_{j_k}^{-m_k}(V) \supset W_0$，因此，$R^{m_k}(W_0) \subset V$，但这与定理 2.19 矛盾，从而也得 $\mathrm{diam}R_j^{-m}(K) \to 0$，$K \subset V$ 是紧集. 证毕.

定理 3.6 设 D 是有理函数 R 的 Siegel 盘或 Herman 环，那么，∂D包含在 R 的临界点集的正向轨道的闭包内.

证明 不妨假设 D 是 R 的一个不变分支，即 $R(D) = D$. 如果存在 $z_0 \in \partial D$ 不属于 R 的临界点的正向轨道的闭包，那么存在 z_0 的充分小邻域U，使得 U 与任一临界点的正向轨道不交. 这样，R^{-n}在 U 内的每个分支都是单值解析的. 用 R_1^{-n} 记 R^{-n}的将$U \cap D$映到D内的那个分支，由于 R 在 D 内共形共轭于一无理旋转，因此存在$\{R_1^{-n}\}$的子列$\{R_1^{-n_j}\}$，在 $U \cap D$ 内收敛于恒等映射 id. 由引理 3.1 的 1)可知，$\{R_1^{-n_j}\}$在 D 内正规，故有收敛子列，不妨仍记为$\{R_1^{-n_j}\}$，且收敛于 id. 但 $\partial D \subset J(R)$，这与引理 3.1 的 2)矛盾. 从而定理得证. 证毕.

我们还可讨论 Cremer 点与临界点的关系.

定理 3.7 设有理函数 R 有一个 Cremer 点 z_0,则 z_0 包含在 R 的某个临界点轨道的极限集内且 z_0 不属于该临界轨道.

证明 不妨设 $z_0 \in J(R)$ 是 R 的不动点. 如果定理不成立,则存在 z_0 的充分小邻域 U,使 R^{-n}在 U 内的每个分支是单值的或至多有一个分支点 z_0. 记 R_1^{-n} 是 R^{-n}将 z_0 映成 z_0 的分支,则 R_1^{-n} 在 U 内单值解析,否则,z_0 将是 R^n 的临界点, $R_1^{-n}(z_0) = z_0$ 及 $|(R_1^{-n})'(z_0)| = 1$. 设 $\{R_1^{-n_j}\}$是$\{R_1^{-n}\}$的收敛子列,则由 $|(R_1^{-n})'(z_0)| = 1$,得$\{R_1^{-n_j}\}$不能收敛于常值函数,这与引理 3.1 的 2)矛盾. 因此定理得证. 证毕.

注 人们曾猜想在 Siegel 盘和 Herman 环的边界点一定存在 R 的一个临界点. Ghys 证明了如果 Siegel 盘 D 的旋转数 θ 满足 Siegel 条件(2.12),且 ∂D 是一条 Jordan 曲线,那么,∂D 上含有临界点, Herman[Her]证明当 θ 满足 Siegel 条件时,若 $R|_{\partial D}$是单射,则 ∂D 上存在临界点. 不久,Herman 找到了这样一个例子: 对 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$,存在 $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, f_λ 有 Siegel 盘,但其边界上没有临界点,因此,继续讨论 Siegel 盘与 Herman 环与临界点的关系,仍是人们所关心的一个问题.

关于 Cremer 点 z_0,存在如下问题:是否存在 R 的临界点 c_0,使得其正向轨道收敛于 z_0?

定理 3.1 与定理 3.4 给出了有理函数在 Fatou 集上动力学性质的完全描述. 结合周期分支的性质,我们有下述推论.

推论 3.4 如果 R 的所有临界点都是严格最终周期的,那么 $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$.

证明 由定理 3.1,每个 Fatou 分支最终是周期的,由条件,临界轨道都是有限的,因此,由定理 3.6,R 没有 Siegel 盘和 Herman 环. 同时由推论 2.6 和推论 2.7,R 也没有吸引 Fatou 分支和抛物 Fatou 分支,因为此时至少有一个临界点被吸引到吸引的或抛物的周期点,而该临界轨道是无限的. 最后,R 也没有超吸引分支,因为此时超吸引周期点是临界点,因此,$F(R) = \varnothing$,即 $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$. 证毕.

由此我们可以很容易地构造 $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$ 的例子,例如

$$R(z) = \left(\frac{z-2}{z}\right)^2$$

有临界点为 2 和 0,它们的轨道为 $2 \mapsto 0 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 1 \cdots$,最终落于不动点 1. 因此, $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$.

§3.3 Sullivan 最终周期性定理:多连通情形

现在我们回过头来考虑定理 3.1 的证明,我们将分两种情形加以讨论,先作一些假设:

假设度 $d \geqslant 2$ 的有理函数 R 有一个游荡的 Fatou 分支 D_0, $D_n = R^n(D_0)$, $n = 0, 1, \cdots$, 那么 $D_n \cap D_m = \varnothing (n \neq m)$; D_n 都为游荡的 Fatou 分支,而 $R: D_n \mapsto D_{n+1}$是有限层分支覆盖,分支点是 R 的临界点,但 R 的临界点只有有限多个,因此,存在 n_0,当 $n \geqslant n_0$ 时,D_n 不含有 R 的临界点. 这时,$R: D_n \mapsto D_{n+1}$是覆盖映射(无分支覆盖),因此,我们不妨就取 D_{n_0}为这个游荡分支,即可以作如下假设.

假设 3.1 $D_n = R^n(D_0)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 不含有 R 的临界点, $R: D_n \mapsto D_{n+1}$是覆盖映射, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

又如果存在某个 D_m 是单连通的,则 $R: D_m \mapsto D_{m+1}$是万有覆盖,覆盖变换群同构于 D_{m+1}的基本群. 由于 R 是有限层覆盖,因此 D_{m+1}的基本群只能是单位群,即 D_{m+1}也是单连通的. 由此,对 $\forall\, n \geqslant m$, D_n 都是单连通的,而 $R: D_n \mapsto D_{n+1}$是同胚,因此,我们可以有进一步作如下假设.

假设 3.2 或者

1) D_0 是单连通的,此时,D_n 都是单连通的,$R: D_n \mapsto D_{n+1}$是同胚(单射);

或者

2) D_0 以及 D_n 都是多连通的,$R: D_n \mapsto D_{n+1}$是覆盖.

称满足假设 3.2 中 1)的 D_0 为单连通游荡分支,而满足 2)的 D_0 为多连通游荡分支,先考虑多连通情形.

引理 3.2 设$U\subset F(R)$是一区域，如果U的轨道$\{R^n(U)\}$中任意$R^n(U)$与R的 Siegel 盘和 Herman 环不相交，那么，$\{R^n\}$的每个收敛子列在U上局部一致收敛于一常值函数.

证明 设存在子列$\{R^{n_k}\}$，在U上一致收敛于一非常值函数f，那么$U'=f(U)$是一区域. 由$U'=\lim\limits_{k\to\infty}R^{n_k}(U)$，$U'\subset F(R)$. 设$D$是包含$U'$的 Fatou 分支，则存在$K>0$，当$k\geqslant K$时，$R^{n_k}(U)\subset D$，因此，若记$p=n_{k+1}-n_k$，那么$R^p(D)=D$，即$D$是$F(R)$的周期分支. 由定理3.4，$D$只有五种情形发生. 由条件，$D$不能是 Siegel 盘或 Herman 环. 但若D是吸引、超吸引或抛物分支，则$\{R^{n_k}\}$在U上必一致收敛于R的吸引、超吸引或有理中性周期点，即$\{R^{n_k}\}$在U上局部一致收敛于常值函数，这与假设矛盾，从而定理得证. 证毕.

引理 3.3 在球面度量下，有理函数R满足 Lipschitz 条件，即存在常数M，使得对任意$z_1, z_2\in\hat{\mathscr{C}}$，成立

$$d_s(R(z_1),\ R(z_2))\leqslant Md_s(z_1,\ z_2),$$

这里d_s是球面距离.

证明 由于R是$\hat{\mathscr{C}}$到$\hat{\mathscr{C}}$的解析映射，在球面度量下的导数(球面导数)$DR(z)$有限，又由于$\hat{\mathscr{C}}$是紧的，故存在常数M，使$||DR(z)||<M(\forall z\in\hat{\mathscr{C}})$，因此，$R$满足球面度量下的 Lipschitz 条件. 证毕.

命题 3.1 设R为度$d\geqslant 2$的有理函数，则$F(R)$不存在多连通游荡分支.

证明 设D_0是这样一个游荡分支：使得$D_n=R^n(D_0)$，$n=0, 1, 2, \cdots$都是多连通的，$D_n\cap D_m=\varnothing(n\neq m)$，$R: D_n\mapsto D_{n+1}$是覆盖. 取$D_{-1}$是$R^{-1}(D_0)$的一个分支，不妨假设$D_{-1}\supset\{z\in\hat{\mathscr{C}}\mid |z|\supset 1\}$，不然的话，可作 Möbius 变换$M$，使得$M(D_{-1})\supset\{z\in\hat{\mathscr{C}}\mid |z|>1\}$，而考虑$R$的共轭$M\circ R\circ M^{-1}$. 因此，每个$D_n$都包含在单位圆盘$\Delta$内.

由于D_0是多连通的，取$r=r(t)$，$t\in[0,1]$是D_0内的一条光滑的简单闭曲线，使得r在D_0内不同伦于一点. 记$r_n=R^n(r)$，则r_n是D_n

内的一条光滑闭曲线，且 r_n 在 D_n 内也不能同伦于一点(否则其提升 r 必将同伦于一点).

又由 D_0 是游荡分支，每个 D_n 不能与 R 的 Siegel 盘或 Herman 环相交，由引理 3.2，$r_n \subset D_n$ 的球面直径 $\mathrm{diam}_s(r_n) \to 0 (n \to \infty)$.

现在 r_n 将 $\hat{\mathscr{C}}$ 分成 $m(n)+1$ 个区域，记 r_n 的无界余分支为 $U(n, 0)$，而其 $m(n)$ 个有界余分支记为 $U(n, i) i = 1, 2, \cdots, m(n)$. 显然 $U(n, 0) \supset \hat{\mathscr{C}} \setminus \overline{\Delta}$，而 $U(n, i) \subset \Delta (1 \leqslant i \leqslant m(n))$. 由于 $\mathrm{diam}_s(r_n) \to 0 (n \to \infty)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，对任意 i，$\mathrm{diam}_s(U(n, i)) < \varepsilon$，由引理 3.3，$\mathrm{diam}_s(R(U(n, i))) < \varepsilon M$. 现取 ε 充分小，使得 $\varepsilon M < \pi$，我们要证明，当 $n \geqslant N$ 时，对任意 i，有

$$R(\overline{U}(n, i)) \subset r_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{m(n+1)} U(n+1, i) = \hat{\mathscr{C}} \setminus U(n+1, 0).$$

事实上，如若不然，则 $R(U(n, i)) \cap U(n+1, 0) \neq \varnothing$，但 $\partial U(n, i) \subset r_n$，$R(\partial U(n, i)) \subset r_{n+1}$，因此只能有 $R(U(n, i)) \supset U(n+1, 0)$，于是

$$\begin{aligned} \varepsilon M > \mathrm{diam}_s R(U(n, i)) &\geqslant \mathrm{diam}_s U(n+1, 0) \\ &\geqslant \mathrm{diam}_s(\hat{\mathscr{C}} \setminus \overline{\Delta}) = \pi, \end{aligned}$$

得到矛盾. 于是，对 $n \geqslant N$，有

$$\begin{aligned} R(r_n \cup \bigcup_{i=1}^{m(n)} U(n, i)) &\subset r_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^{m(n+1)} U(n+1, i) \\ &\subset \hat{\mathscr{C}} \setminus U(n+1, 0) \subset \Delta. \end{aligned}$$

特别地，对 $\forall\, k > 0$，有

$$R^k(r_N \cup \bigcup_{i=1}^{m(N)} U(N, i)) \subset \hat{\mathscr{C}} \setminus U(N+k, 0) \subset \Delta.$$

因此，$\{R^n\}$ 在每个 $U(N, i)$ 上正规(Montel 定理)，$U(N, i) \subset F(R)$. 但是，由于 r_N 在 D_N 内不同伦于一点，因此，必有某个 $U(N, i)$ 包含 D_N 的边界点，从而包含 Julia 集的点，这就得到矛盾，从而命题得证. 证毕.

上述证明来自于文献[BKL].

§ 3.4 拟共形映射和有理函数的拟共形形变

证明单连通游荡分支不存在，要用到拟共形映射和有理函数的拟共形形变. 有理函数的拟共形形变是由 Sullivan 引入的，他还用它证明了定理 3. 1[SuI]. 它也是现代复解析动力系统研究中最有力的工具之一.

§ 3.4.1 拟共形映射与可测 Riemann 映射定理

下面我们简要地回顾一下拟共形映射的有关知识，在这里我们使用了几何的术语 . 拟共形映射精确的定义和论述请参阅文献[Ah,Lv].

设(S, σ_0)是一个 Riemann 曲面，复结构为 σ_0，称这个复结构 σ_0 为标准复结构，S 的共形 Riemann 度量在标准复结构的局部参数 z 下可表示为 $\lambda(z)|\mathrm{d}z|$ $(\lambda(z)>0)$. 现在设 σ 是 S 的另一复结构，关于 σ_0 是几乎处处可微的(即若 w 是(S, σ)的局部参数，变换 $w=w(z)$ 是几乎处处可微的)，那么，复结构 σ 下的任一共形 Riemann 度量 $\lambda_1(\omega)|\mathrm{d}w|$ 在标准复结构 σ_0 下成为可测 Riemann 度量 $\lambda_2(z)|\mathrm{d}z+\mu(z)\mathrm{d}\bar{z}|$，这里 $\mu(z)=\dfrac{\partial_{\bar{z}}w}{\partial_z w}\in L^\infty$，且几乎处处成立 $|\mu(z)|<1$. 显然，μ 仅与复结构 σ 有关而与共形 Riemann 度量无关，称 μ 为复结构 σ(相对于标准复结构 σ_0)的复伸张. $\mu(z)$的几何意义为，若记 $\mu(z)=|\mu(z)|\mathrm{e}^{2\pi i\theta(z)}$，则 $K(z)=(1+|\mu(z)|)/(1-|\mu(z)|)$ 是无穷小椭圆 $|\mathrm{d}z+\mu(z)\mathrm{d}\bar{z}|=1$ 的长短轴之比，而 $\theta(z)$是无穷小椭圆的主轴方向. 如果 $\|\mu(z)\|_\infty<1$ (等价地 $\|K(z)\|_\infty<\infty$)，那么称复结构 σ(相对于 σ_0)有有界的复伸张，此时 $K=\|K(z)\|_\infty=1+\|\mu(z)\|_\infty/1-\|\mu(z)\|_\infty$ 称为 σ的最大伸缩商. 显然，标准复结构即为其复伸张 $\mu\equiv0$ 的复结构，以后，对任何 Riemann 曲面，总假定已给定了一个标准复结构，并记为 σ_0，例如，对$\hat{\mathscr{C}}$中的区域 D，其标准复结构取为由其自然参数确定的复结构.

注　S 上的复结构联系着 S 上的一个$(-1,1)$-微分形式 $\mu(z)\dfrac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}z}$，称为 Beltrami 微分．传统的拟共形映射的定义是从 Beltrami 微分出发的，见文献[Ah,LV].

如果 f 是 S_1 到 S_2 上的几乎处处可微映射，σ_2 是 S_2 上的一个复结构，则 f 自然地诱导复结构上的拉回 f^*，$\sigma_1=f^*\sigma_2$ 是 S_1 上的一个复结构. 如果 f 是解析的，那么 $\sigma_1=f^*\sigma_2$ 与 σ_2 具有相同的最大伸缩商. 下面定义拟共形映射.

定义 3.2　设 $f:S_1\mapsto S_2$ 是一个几乎处处可微分同胚，如果存在 S_1 上的复结构 σ，它关于标准复结构具有有界复伸张，使得 $\sigma=f^*\sigma_0$，则称 f 是 Riemann 曲面 S_1 到 S_2 的拟共形映射. 如果 σ 的最大伸缩商小于等于 K，则称 f 为 K-拟共形映射，而 σ 的复伸张 μ 也称为 f 的复伸张.

如果 D 是复球面 $\hat{\mathscr{C}}$ 中的一个区域，则 D 上的拟共形映射 $f:D\mapsto f(D)$ 可等价地描述为下述 Beltrami 方程：

$$\partial_{\bar{z}}f=\mu(z)\partial_z f \tag{3.1}$$

的几乎处处可微的同胚解，这里系数 $\mu\in L^\infty(D)(\|\mu(z)\|_\infty<1)$ 是 f 的复伸张.

下面列出拟共形映射的一些性质.

引理 3.4　设 $f:S_1\mapsto S_2$ 是拟共形映射，

1) 若 σ_2 是 S_2 上的复结构，具有有界复伸张，则 $f^*\sigma_2$ 是 S_1 上的复结构，也具有有界复伸张，因此，若 $g:S_2\mapsto S_3$ 是拟共形映射，则 $g\circ f$ 也是拟共形的；

2) f 是共形映射的充要条件为 $f^*\sigma_0=\sigma_0$（即为 1-拟共形映射），故若 f_1 与 f_2 是两个有相同复伸张的拟共形映射，则 $f_2\circ f_1^{-1}$ 是共形的.

上述结构的验证是直接的．特别地，2)对一般的解析映射也成立：一个几乎处处可微分映射 $f:S_1\mapsto S_2$ 是解析映射的充要条件为 $f^*\sigma_0=\sigma_0$.

定理 3.8(Morrey 定理[Mor]) 设 S 是一个 Riemann 曲面,σ 是 S 上一复结构,具有有界复伸张,则存在 Riemann 曲面 S' 以及拟共形映射 $f: S \mapsto S'$,使得 $\sigma = f^* \sigma_0$.

我们对 $S = \hat{\mathscr{C}}$ 以及上半平面 H 的情形特别感兴趣. 注意到 H 上的复伸张 μ 可以通过 $\mu(z) = \overline{\mu(\bar{z})}$ 对称扩充到$\hat{\mathscr{C}}$上,因此,S' 必为$\hat{\mathscr{C}}$或 H. 我们有下面著名的可测 Riemann 映射定理.

定理 3.9(Ahlfors-Bers 定理[AB])

1) 对任意$\hat{\mathscr{C}}$(或 H)上的复结构 σ,若 σ 具有有界复伸张 μ,则存在拟共形映射 $\varphi: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$(或 $H \mapsto H$),φ 也以 μ 为复伸张,即 $\varphi^* \sigma_0 = \sigma$,并且在保持 0, 1, ∞不变的条件下,φ 是唯一的. 称保持 0, 1, ∞的拟共形映射为规范的拟共形映射,记为 φ_μ;

2) 若复伸张 $\mu = \mu_t$ 解析地(或连续地)依赖于参数 $t = (t_1, \cdots, t_m)$,则对应的规范拟共形映射 φ_μ 也解析地(或连续地)依赖于参数 t.

上述可测 Riemann 映射定理在复解析动力系统研究中有着广泛的应用.

由定义,拟共形映射有如下几何意义:它将任意一点的无穷小圆映成无穷小椭圆. 具体地,我们有下面的定理(见文献[Li]).

定理 3.10 设 $f: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$是 K-拟共形映射,则对任意 $z_0 \in \hat{\mathscr{C}}$,都有:

$$\varlimsup_{r \to 0} \frac{\max\limits_{d(z, z_0) = r} d(f(z), f(z_0))}{\min\limits_{d(z, z_0) = r} d(f(z), f(z_0))} \leqslant \lambda(K) < \infty, \quad (3.2)$$

这里 d 是$\hat{\mathscr{C}}$上的球面度量.

上述性质被称为 Person 性质,由此,可以将拟共形映射推广到$\hat{\mathscr{C}}$的任意子集上(见第五章).

由 Person 性质,可以证明:若两条相交直线的交角大于零,则其拟共形映射的像的交角也大于零.

§3.4.2 有理函数的拟共形形变

下面考虑有理函数的拟共形形变.

定义 3.3 设 R 是一个有理函数，σ 是 $\hat{\mathscr{C}}$ 上的一个复结构，有有界复伸张 μ，φ 是 $\hat{\mathscr{C}}$ 到 $\hat{\mathscr{C}}$ 的拟共形映射，$\varphi^*\sigma_0=\sigma$，记 $R_\mu=\varphi\circ R\circ\varphi^{-1}$，称 R_μ 拟共形共轭于 R. 一般说来 R_μ 并不解析，如果 R_μ 也是有理函数，则称 R_μ 是 R 的拟共形形变.

下面给出 R_μ 为 R 的拟共形形变的条件.

引理 3.5 设 σ 是 $\hat{\mathscr{C}}$ 上的复结构，有有界复伸张 μ，$\varphi^*\sigma_0=\sigma$，则 $R_\mu=\varphi\circ R\circ\varphi^{-1}$ 为 R 的拟共形形变的充要条件为 $R^*\sigma=\sigma$.

证明 由引理 3.4，R_μ 成为有理函数的充要条件为 $R_\mu^*\sigma_0=\sigma_0$，即 $(\varphi\circ R\circ\varphi^{-1})^*\sigma_0=\sigma_0$，但 $(\varphi\circ R\circ\varphi^{-1})^*=(\varphi^{-1})^*\circ R^*\circ\varphi^*=(\varphi^*)^{-1}\circ R^*\circ\varphi^*$，因此 $\sigma_0=(\varphi^*)^{-1}\circ R^*\circ\varphi^*\sigma_0=(\varphi^*)^{-1}\circ R^*\sigma$，即 $R^*\sigma=\varphi^*\sigma_0=\sigma$ 过程可逆. 证毕.

满足 $R^*\sigma=\sigma$ 的复结构 σ 称为 R-不变的. 容易验证，$R^*\sigma=\sigma$ 的一个等价形式为其复伸张 μ 满足：

$$\mu(z)=\mu(R(z))\frac{\overline{R'(z)}}{R'(z)}. \tag{3.3}$$

定义 3.4 两个有理函数 R_1 与 R_2 若存在拟共形映射 φ，使得 $R_2=\varphi\circ R_1\circ\varphi^{-1}$，则称 R_1 与 R_2 是拟共形共轭的；若存在同胚 φ 使得 $R_2=\varphi\circ R\circ\varphi^{-1}$，则称 R_1 与 R_2 是拓扑共轭的.

拟共形共轭保持动力系统的度量性质，而拓扑共轭保持动力系统的拓扑性质.

§3.5 Sullivan 最终周期性定理：单连通情形

本节将证明有理函数不存在单连通游荡分支，从而完成定理 3.1 的证明.

记 Rat_d 是度为 d 的有理函数组成的空间，每个 $R \in \mathrm{Rat}_d$ 由其 $2d+2$ 个系数所确定，且连续依赖于系数，因此，Rat_d 可以嵌入到 $\mathscr{C}^{2d+2} = \mathscr{R}^{4d+4}$ 内.

引理 3.6 设单连通区域 D 共形等价于上半平面 H，$\pi: H \mapsto D$ 是共形映射，设 $\varphi_t: \overline{D} \mapsto \overline{D}$ 是同胚，连续依赖于参数 $t \in [-\delta, \delta]$，且满足：

1) $\varphi_t: D \mapsto D$ 是 K-拟共形映射($t \in [-\delta, \delta]$)；

2) $\varphi_t \mid \partial D = id, t \in [-\delta, \delta]$；

3) $\varphi_0 = id$，

那么，φ_t 在 H 上的共轭 $\widetilde{\varphi}_t = \pi^{-1} \circ \varphi_t \circ \pi: H \mapsto H$ 可以扩充到 $\overline{H}$ 上，且满足：

$$\widetilde{\varphi}_t|_{\hat{\mathscr{R}}} = id,\ t \in [-\delta, \delta],$$

这里 $\hat{\mathscr{R}} = \mathscr{R} \cup \{\infty\}$.

证明 显然 $\widetilde{\varphi}_t$ 连续依赖于 t，$\widetilde{\varphi}_0 = id$. 下面证明 $\widetilde{\varphi}_t$ 可连续扩充为 $\overline{H}$ 上的同胚，且仍连续依赖于 t. 事实上，设 $\widetilde{\mu}_t$ 是 $\widetilde{\varphi}_t$ 的复伸张，定义 $\mu_t(\overline{z}) = \overline{\mu_t(z)}$，将 μ_t 扩充到整个 $\hat{\mathscr{C}}$，自然 μ_t 连续依赖于 t. 由可测 Riemann 映射定理，存在拟共形映射 $\varphi_{\mu_t}: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，保持上半平面 H 不变，且连续依赖于 t. 注意到 $\widetilde{\varphi}_t^{-1} \circ \varphi_{\mu_t}$ 限制在上半平面 H，是共形的，可扩充到 $\overline{H}$ 且是连续依赖于 t 的，故 $\widetilde{\varphi}_t$ 可扩充到 $\overline{H}$ 且连续依赖于 t.

现在 $\pi: H \mapsto D$ 是单叶的，因此，π 可以表示成两个有界解析函数的商. 由 Fatou 及 F. 和 M. Riesz 定理，存在 $\hat{\mathscr{R}}$ 的满测度子集 Λ(即 mes $(\mathscr{R} \backslash \Lambda) = 0$)，使得对任意 $x \in \Lambda$，$\pi(z)$ 有径向极限 $\pi(x)$，且在 Λ 的任意正测度子集上，$\pi(x)$ 不为常数.

现在证明，对任意 $t \in [-\delta, \delta]$，$\widetilde{\varphi}_t(\Lambda) \subset \Lambda$，且

$$\pi \circ \widetilde{\varphi}_t(x) = \pi(x),\ x \in \Lambda. \tag{3.4}$$

事实上，若曲线 l 在 H 的 Stolz 角域内，即在位于 H 内顶点位于其边

界的角状区域内趋向于 $x \in \Lambda$, 则由拟共形映射的拟保角性质(或由 Person 性质), $\widetilde{\varphi}_t(l)$ 也在 Stolz 角域内趋向于 $\widetilde{\varphi}_t(x)$. 由于 $\pi \circ \widetilde{\varphi}_t(z) = \varphi_t \circ \pi(z)$, $z \in H$, 当 z 沿 l 趋向于 $x \in \Lambda$ 时,等式右边的 $\pi(z)$ 趋向于 $\pi(x)$, 又 φ_t 连续到 ∂D,即得等式左边也有径向极限 $\pi \circ \widetilde{\varphi}_t(x)$,即 $\widetilde{\varphi}_t(x) \in \Lambda$, 且 $\pi \circ \widetilde{\varphi}_t(x) = \varphi_t \circ \pi(x)$. 由 $\varphi_t | \partial D = id$, 即得(3.4)式.

另一方面,对固定的 $x \in \Lambda$, $\widetilde{\varphi}_t(x)$ 是 $t \in [-\delta, \delta]$ 的连续函数,故 $\{\widetilde{\varphi}_t(x) | t \in [-\delta, \delta]\}$ 是 $\hat{\mathscr{R}}$ 内一闭区间,(3.4)式表明 π 将闭区间映成一点 $\pi(x)$,但 π 在 Λ 的正测度子集上不为常数,故这闭区间只能退化为一点. 但由 $\widetilde{\varphi}_0(x) = x$ 得 $\widetilde{\varphi}_t(x) \equiv x$, $t \in [-\delta, \delta]$, 所以 $\widetilde{\varphi}_t|_\Lambda = id$, 注意到 Λ 在 $\hat{\mathscr{R}}$ 稠密且 $\widetilde{\varphi}_t$ 在 $\hat{\mathscr{R}}$ 上连续,即得 $\widetilde{\varphi}_t|_{\hat{\mathscr{R}}} = id$. 证毕.

引理 3.7 对任意 $m > 4d + 4$, 存在 m 个线性无关的复伸张 $\widetilde{\mu}_n \in L^\infty(H)$, $\| \widetilde{\mu}_n \|_\infty = k < 1 (n = 1, 2, \cdots, m)$, 使得以 $\widetilde{\mu}_v = \sum v_n \widetilde{\mu}_n$, $v = (v_1, v_2, \cdots, v_m) \in \mathscr{R}^m$, $|v_n| \leqslant 1$ 为复伸张的规范拟共形映射(即保持 0, 1, ∞ 不变) $\psi_v: H \mapsto H$ 满足当 $v' \neq v$ 时, $\psi_{v'}|_{\hat{\mathscr{R}}} \neq \psi_v|_{\hat{\mathscr{R}}}$.

证明 我们直接构造 $\widetilde{\mu}_n$ 如下. 对 $1 \leqslant n \leqslant m$, 令

$$\widetilde{\mu}_n(z) = \begin{cases} k, & n \leqslant \mathrm{Re} z \leqslant n+1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

那么 $\widetilde{\mu}_1, \cdots, \widetilde{\mu}_m$ 线性无关,且 $\| \widetilde{\mu}_n \|_\infty = k < 1$. 容易验证:

$$\psi_n(z) = \psi_n(x + \mathrm{i}y) = \begin{cases} x + \mathrm{i}y, & x \leqslant n, \\ K(x-n) + n + \mathrm{i}y, & n \leqslant x \leqslant n+1, \\ x + \mathrm{i}y + K - 1, & x \geqslant n+1 \end{cases}$$

是以 $\widetilde{\mu}_n$ 为复伸张的规范拟共形映射,它是唯一的,且当 $\mathrm{Re} z \notin [n, n+1]$ 时, $\partial_{\bar{z}} \psi_n(z) = 0$.

令 $\psi_v(z) = \sum_{n=1}^{m} v_n(\psi_n(z) - z) + z$, ψ_v 是 $H \mapsto H$ 的几乎处处可微

分同胚,且保持 0, 1, ∞不变,直接验证得 ψ_v 的复伸张即为$\widetilde{\mu}_v(z)$,且 $\psi_{v'}|_{\hat{\mathscr{R}}} \neq \psi_v|_{\hat{\mathscr{R}}}(v' \neq v)$. 证毕.

注 上述复伸张$\widetilde{\mu}_v$ 有一致有界的上界 $k < 1$, 其全体同胚于$\mathscr{R}^m$中的一个闭立方体 $M = \{v \in \mathscr{R}^m \mid |v_n| \leqslant 1\}$.

命题 3.2 设 R 为度 $d \geqslant 2$ 的有理函数,则$F(R)$不存在单连通的游荡分支.

证明 假设$F(R)$有一个单连通游荡分支 D_0, $D_n = R^n(D_0)$ 都是单连通分支,$R^n: D_0 \mapsto D_n$ 是同胚,且当 $n \neq m$ 时, $D_n \cap D_m = \varnothing$, 又由于 D_0 是双曲 Riemann 区域,共形等价于上半平面 H,因此,存在共形映射 $\pi: H \mapsto D_0$.

现在,令 $m > 4d + 4$, 取 $\widetilde{\mu}_v = \sum_{i=1}^{m} v_i \widetilde{\mu}_i$, $v = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$, $|v_i| \leqslant 1$ 以及 ψ_v 为引理 3.7 中所定义,记$\widetilde{\sigma}_v$ 为 H 上由$\widetilde{\mu}_v$ 所确定的复结构,则 $(\psi_v)^* \sigma_0 = \widetilde{\sigma}_v$, $\widetilde{\sigma}_v$ 关于标准复结构 σ_0 有有界的最大伸缩商. 我们要用$\widetilde{\sigma}_v$ 来定义$\hat{\mathscr{C}}$上的复结构 σ_v,它关于标准复结构 σ_0 也有有界的最大伸缩商,且在 R 下不变,即 $R^* \sigma_v = \sigma_v$.

我们分块定义 σ_v,先在由 D_0 的大轨道 $GO(D_0)$所决定的完全不变子集 $V = \bigcup_{D \in GO(D_0)} D$ 上定义.

在 D_0 上,定义 $\sigma_v = \sigma_{v,0} = (\pi^{-1})^* \widetilde{\sigma}_v$. 然后在 $D_n = R^n(D_0)$ 上,定义 $\sigma_v = \sigma_{v,n} = (R^{-n})^* \sigma_{v,0}$. 由于 $R^n: D_0 \mapsto D_n$ 是同胚,所以定义是合理的. 我们已在每个 D_n 上定义好了 $\sigma_v = \sigma_{v,n}$, 对任意 $D \in GO(D_0)$, 存在 k, n, 使得 $R^k(D) = D_n$, 这样,可在 D 上定义 $\sigma_v = (R^k)^* \sigma_{v,n}$, 且这样的定义是唯一确定的. 若 $R^{k+l}(D) = D_{n+l}$, 则 $(R^{k+l})^* \sigma_{v,n+l} = (R^{l+k})^* \sigma_{v,n+l} = (R^k)^* (R^l)^* \sigma_{v,n+l} = (R^k)^* \sigma_{v,n}$, 因此,我们在 V 上已定义好了 σ_v. 由定义 $R^* \sigma_v = \sigma_v$, 且由于 π,R 都是解析的,故 σ_v 与$\widetilde{\sigma}_v$ 有相同的最大伸缩商. 最后,在$\hat{\mathscr{C}} \backslash V$ 上,定义 $\sigma_v = \sigma_0$ (标准复结构).

这样定义的 σ_v 关于 σ_0 有有界的最大伸缩商,且 $R^* \sigma_v = \sigma_v$, 对应于 σ_v 的复伸张记为 μ_v,它解析地依赖于参数 v.

由可测 Riemann 映射定理，存在$\hat{\mathscr{C}}$上规范拟共形映射 $\varphi_v: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，以 μ_v 为复伸张，即 $\varphi_v^* \sigma_0 = \sigma_v$，且也解析地依赖于参数 $v \in \mathscr{R}^m$. 由引理 3.5 可知，R 的拟共形形变 $R_v = \varphi_v \circ R \circ \varphi_v^{-1}$ 是度为 d 的有理函数，即 $R_v \in \mathrm{Rat}_d$. 同样，R_v 解析依赖于 v.

记 $M_m = \{v \in \mathscr{R}^m \mid |v_i| < 1\}$，考虑映射

$$\Phi: M_m \mapsto Rat_d \subset \mathscr{R}^{4d+4},$$

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_m) \mapsto R_v,$$

那么，由于 $m > 4d + 4$，则 $\Phi^{-1}(R_0)$包含一条过 O 点的解析曲线 $v: (-\delta, \delta) \mapsto M_m$，满足$v(0) = 0$. 简记 $R_v(t) = R_t$，$\varphi_v(t) = \varphi_t$，这样，对任意 $t \in (-\delta, \delta)$，

$$\varphi_t \circ R \circ \varphi_t^{-1} = R_0 = \varphi_0 \circ R \circ \varphi_0^{-1},$$

由此得

$$\varphi_0^{-1} \circ \varphi_t \circ R = R \circ \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t,$$

即映射 $\Phi_t = \varphi_0^{-1} \circ \varphi_t$ 与 R 可交换，由此即得

$$\Phi_t \circ R^n = R^n \circ \Phi_t.$$

设 $z_0 \in \hat{\mathscr{C}}$ 是 R 的周期点，则由上式，$\Phi_t(z_0)$也是 R 的周期点. 注意到 $\Phi_t(z_0)$关于 t 连续，$\Phi_0(z_0) = z_0$ 以及 R 的周期点集是离散的，得 $\Phi_t(z_0) \equiv z_0$，即 Φ_t 在 R 的周期点集上为恒等映射. 又周期点集在$J(R)$内稠密，故 $\Phi_t|_{J(R)} = id$，特别地，$\Phi_t|_{\partial D_0} = id$，即 $\varphi_0|_{\partial D_0} = \varphi_t|\partial D_0$. 另外，$\Phi_0 = \varphi_0^{-1}\varphi_0 = id$.

记 $\widetilde{\varphi}_t = \pi^{-1} \circ \varphi_t \circ \pi, t \in (-\delta, \delta)$，$\widetilde{\Phi}_t = \pi^{-1} \circ \Phi_t \circ \pi$，则 $\widetilde{\Phi}_t = \widetilde{\varphi}_0^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_t$. 而 Φ_t，$\widetilde{\Phi}_t$满足引理 3.6 的条件，故 $\widetilde{\Phi}_t|_{\hat{\mathscr{R}}} = id$，即

$$\widetilde{\varphi}_0|_{\hat{\mathscr{R}}} = \widetilde{\varphi}_t|_{\hat{\mathscr{R}}}.$$

现在考虑映射$\widetilde{\varphi}_t \circ \psi_t^{-1}: H \mapsto H, t \in (-\delta, \delta)$，

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\varphi}_t \circ \psi_t^{-1})^* \sigma_0 &= (\psi_t^{-1})^* \circ (\widetilde{\psi}_t)^* \sigma_0 \\
&= (\psi_t^{-1})^* \circ \pi^* \circ (\varphi_t)^* (\pi^{-1})^* \sigma_0 \\
&= (\psi_t^{-1})^* \circ \pi^* \circ (\varphi_t)^* \sigma_0 \\
&= (\psi_t^{-1})^* \circ \pi^* \sigma_{v(t)} \\
&= (\psi_t^{-1})^* \, \widetilde{\sigma}_{v(t)} = \sigma_0,
\end{aligned}
$$

故$\widetilde{\varphi}_t \circ \psi_t^{-1}$是$H$上的共形映射，因此$\psi_0 \circ \widetilde{\varphi}_0^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_t \circ \psi_t^{-1} = \psi_0 \circ \widetilde{\Phi}_t \circ \psi_t^{-1}$是$H$上的共形映射. 又在$\hat{\mathscr{R}}$上，$\psi_t$，$\psi_0$保持 0，1，$\infty$不变，$\widetilde{\Phi}_t |_{\hat{\mathscr{R}}} = id$，故$\psi_0 \circ \widetilde{\Phi}_t \circ \psi_t^{-1}$保持 0，1，$\infty$不变，因此$\psi_0 \circ \widetilde{\Phi}_t \circ \psi_t^{-1} = id$，即$\varphi_0^{-1} \circ \psi_t = \widetilde{\Phi}_t$，于是$\psi_0^{-1} \circ \psi_t |_{\hat{\mathscr{R}}} = \widetilde{\Phi}_t |_{\hat{\mathscr{R}}} = id$，$\forall\, t \in (-\delta, \delta)$，这与引理 3.7 矛盾，从而命题得证. 证毕.

结合命题 3.1、命题 3.2 和 § 3.3 的假设，我们完成了定理 3.1 的证明.

参考文献

[Su1] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann. Math.* 122 (1985)401-418.

[Su2] D. Sullivan, *Qusaiconformal homeomorphisms and dynamics III: Topological conjugacy classes of analytic endomorphisms.* I. H. E. S. preprint 1983.

[Ar] V. Arnold, Small denominatiors I: On the mappings of the circumference into itself. *Amer. Math. Sci. Trans.* 46 (1965) 213-284.

[Her] M. Herman, Sur la conjugation différentiables des difféomorphismes du cercle a las rotations. *Publ. C. H. E. S. eg* (1979) 5-233.

[Yoc] J. -C. Yoccoz, Conjugation différentiables des difféomorphismes du cercle dont la nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Ann. Sci. Ecole Norm Sup. Paris* 17 (1984) 337-358.

[BKL] I. N. Baker, Kotus and Y. N. Lü, Iterates of meromorphic functions IV: Critically finite functions. *Results Math.* 22 (1992) 651-656.

[Ah] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal mappings.* Van Nostrand 1966.

[LV] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Qusaiconformal mappings on the plane.* Springer-Verlag, Berlin 1973.

[Mor] B. C. Morrey, On the solution of quasilinear elliptic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1938) 126-166.

[AB] L. V. Ahlfors and L. Bers, Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Ann. of Math.* 72 (1960) 385-404.

[Li] 李忠,拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用．科学出版社，1988.

第四章 Julia 集的动力学

在前一章中，我们讨论了有理函数动力系统之 Fatou 集的拓扑动力学性质，现在我们来讨论 Julia 集的动力学性质.

按照 Julia 集的定义，Julia 集上点的轨道通常不再具有好的收敛性，事实上，对于 Julia 集上任意接近的两点，其轨道状态也具有本质的不同. 例如，在第二章中我们得知，存在 Julia 集上的一个稠密子集，使得其中每一点的轨道在 Julia 集内稠密(推论 2.5)，而另一方面，排斥周期点集也在 Julia 集内稠密(定理 2.18)，这说明了有理函数在 Julia 集上其轨道是不稳定的，动力学性质极为复杂，此时我们可以考虑有理函数在 Julia 集上的可测动力学.

§4.1 递归性质

下面引进一些定义. 本节中我们仅在 Lebesgue 测度下考虑. 所有的测度均指 Lebesgue 测度，用 mes 表示 Lebesgue 测度.

设 $J \subset \hat{\mathscr{C}}$ 是一可测集，$f: J \mapsto J$ 是到上的可测自映射. 与有理函数一样，定义 f 的大轨道为下述等价关系下的等价类：两点 $z_1, z_2 \in J$ 是等价的当且仅当存在 $n, m \geqslant 0$，使得 $f^n(z_1) = f^m(z_2)$，这个等价关系称为大轨道关系.

定义 4.1 如果对任意可测子集 $X \subset J$，只要 X 与 f 的每条大轨道的交不多于一点，就有 $\mathrm{mes}X = 0$，则称 f 在 J 上关于 Lebesgue 测度是弱递归的(也称为 f 的大轨道关系是递归的).

定义 4.2 如果对任意可测子集 $X \subset J$，$f^{-1}(X) \subset X$ 蕴含了 $\mathrm{mes}(X \setminus f^{-1}(X)) = 0$，则称 f 在 J 上关于 Lebesgue 测度是(强)递

归的.

定义 4.3 如果对任意 f-完全不变可测子集 $X \subset J$，均有 $\text{mes}X = 0$ 或者 $\text{mes}X = \text{mes}J$，则称 f 在 J 上关于 Lebesgue 测度是遍历的.

关于遍历理论，可参看文献[Wal].

下面考虑有理函数 R. Julia 集 $J(R)$是 R 的完全不变集，我们限制 R 为$J(R)$到$J(R)$的可测映射，则 R 在$J(R)$上的弱递归性、递归性和遍历性之间有如下关系：递归蕴含了弱递归，遍历也蕴含了弱递归，但遍历与递归之间没有包含关系. 下面给出 R 在$J(R)$上递归与弱递归性的另一描述.

定义 4.4

1）一个正测度子集 $X \subset J(R)$ 称为是游荡集，如果对任意 n，$m \geqslant 0$，$n \neq m$，成立 $f^n(X) \cap f^m(X) = \varnothing$；

2）$X \subset J(R)$ 称为单射游荡集，如果 X 是游荡的，且对每个 $n > 0$，$R^n|_X : X \mapsto R^n(X)$ 是单射.

引理 4.1

1）R 在 $J(R)$上递归的充要条件是$J(R)$内不存在正测度游荡集；

2）R 在 $J(R)$上弱递归的充要条件是$J(R)$内不存在正测度单射游荡集.

证明 1）必要性：设 R 有一个正测度游荡子集 $X \subset J(R)$，$\text{mes}X > 0$，那么，对任意 $n > 0$，$X \cap R^n(X) = \varnothing$. 记 $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(X)$，$A = J(R)\backslash Y$，则 $R^{-1}(A) \subset J(R)\backslash R^{-1}(Y) \subset J(R)\backslash Y = A$. 由递归性，$\text{mes}(A\backslash R^{-1}(A)) = 0$，但 $A\backslash R^{-1}(A) \supset R^{-1}(Y)\backslash Y \supset X$，得 $\text{mes}X = 0$，矛盾，从而必要性得证.

充分性：若存在 A，$R^{-1}(A) \subset A$，但 $\text{mes}(A\backslash R^{-1}(A)) > 0$，则令 $X = A\backslash R^{-1}(A)$，即得对任意 n，$m \geqslant 0$，$n \neq m$，$R^n(X) \cap R^m(X) = \varnothing$，即 X 是正测度游荡集.

2）必要性：设 X 是一个单射游荡集，我们断言 X 与 R 的每条大轨道至多交于一点：若有 z_1，$z_2 \in X$ 属于同一大轨道，则存在 n，$m \geqslant 0$，

$R^n(z_1)=R^m(z_2)$；若 $n=m$，则由 X 是单射的可知，$z_1=z_2$，若 $n\neq m$，则 $R^n(X)\cap R^m(X)\neq\varnothing$，这与 X 是游荡集矛盾，因此，由弱递归性，$\text{mes}X=0$.

充分性：设 X 与每条大轨道至多交于一点，则 $R^n|_X$ 是单射的，又若 $R^n(X)\cap R^m(X)\neq\varnothing$，$n\neq m$，则存在 $z_1,z_2\in X$，$R^n(z_1)=R^m(z_2)$，即 z_1 与 z_2 属于同一大轨道，故 $z_1=z_2$ 是 R 的最终周期点. 注意到 R 的周期点集是可列集，其逆轨道全体 P_0 仍是可列集，故 $\text{mes}P_0=0$. 令 $X_0=X\backslash P_0$，则 $R^n(X_0)\cap R^m(X_0)=\varnothing$，因此，$X_0$ 是一单射游荡集，$\text{mes}X_0=0$，得 $\text{mes}X=0$. 证毕.

利用上一章中 Sullivan 建立的拟共形形变的方法，我们可以证明下述定理.

定理 4.1 设 R 是度 $\text{deg}R\geqslant 2$ 的有理函数，则 R 在其 Julia 集 $J(R)$上是弱递归的.

证明 用反证法. 设 $X\subset J(R)$ 是一个正测度子集，与每条大轨道至多交于一点，由引理 4.1，可以假设每个 R^n 在 X 上是单射的，且对 $n\neq m$，$R^n(X)\cap R^m(X)=\varnothing$. 任取 $k\geqslant 4\cdot\text{deg}R+5$，可以将 X 划分成 k 个互不相交的正测度子集 $X_1, X_2, \cdots, X_l$，$X=\bigcup\limits_{j=1}^{l}X_j$，$X_i\cap X_j=\varnothing$ $(i\neq j, 1\leqslant i, j\leqslant l)$，$\text{mes}X_j>0(1\leqslant j\leqslant l)$. 现在对每个 $v=(v_1, v_2, \cdots, v_l)\in\Omega_k=\{v_1, \cdots, v_l)\,|\sum\limits_{j=1}^{l}|v_j|\leqslant k<1\}$ 定义 X 上 L^∞ 函数 $\mu_v=\sum\limits_{j=1}^{l}v_j 1_{X_j}$，这里 1_{X_j}表示 X_j 的特征函数，则 $\|\mu_v\|_\infty\leqslant k<1$. 由于 R 在 X 上是单射的及 $R^n(X)\cap R^m(X)=\varnothing(n\neq m)$，我们可以通过

$$\mu_v(R^n(z))=\mu_v(z)\frac{\overline{(R^n)'(z)}}{(R^n)'(z)},\ z\in X$$

将 μ_v 的定义扩充到每个 $R^n(X)$上，同时，通过

$$\mu_v(z)=\mu_v(R^m(z))\frac{\overline{(R^m)'(z)}}{(R^m)'(z)},\ R^m(z)\in R^n(X)$$

将 μ_v 扩充到整个 X 的大轨道 $GO(X)$上. 在 $GO(X)$的余集上,定义 $\mu_v \equiv 0$, 这样, μ_v 在整个$\hat{\mathscr{C}}$上有定义, $\mu_v \in L^\infty(\hat{\mathscr{C}})$, 且 $\|\mu_v\|_\infty \leqslant k < 1$. 另外,如 $v \neq v'$, 则 $\mu_v \neq \mu_{v'}$.

设 σ_v 为 μ_v 对应的复结构,它关于标准复结构 σ_0 有有界复伸张,且由定义, $R^*\sigma_v = \sigma_v$, 利用可测 Riemann 映射定理可知,存在解析依赖于参数 v 的拟共形映射 φ_v,使得 $\varphi_v^*\sigma_0 = \sigma_v$. 由引理 3.5 可知, $R_v = \varphi_v \circ R \circ \varphi_v^{-1}$ 是有理函数. 由于 Rat_d 至多是 $4d + 4$ 维的,因此存在曲线 $v(t)$, $-\delta \leqslant t \leqslant \delta$, 使得 $\varphi_{v(t)} \circ R \circ \varphi_{v(t)}^{-1} = \varphi_{v(0)} \circ R \circ \varphi_{v(0)}^{-1}$. 记 $\psi_t = \varphi_{v(t)}^{-1} \circ \varphi_{v(0)}$, 则 ψ_t 与 R 可交换,与命题 3.1 的证明中理由相同, $\psi_t|_{J(R)} = id$. 注意到在 Fatou 集 $F(R)$上, $\sigma_v = \sigma_0$, 故 $\psi_t^*\sigma_0 = \sigma_0$, 即 ψ_t 是共形映射,因此 $\psi_t \equiv id$, 即 $\varphi_{v(t)} \equiv \varphi_{v(0)}$. 但当 $t \neq 0$ 时,$\varphi_{v(t)}$与 $\varphi_{v(0)}$有不同的复特征,得出矛盾,从而定理证毕.

关于 R 在 Julia 集上的递归性与遍历性,目前尚没有这样的一般结论,R 在 $J(R)$上是否递归仍是一个没有解决的问题. M. Rees 证明了当 R 的临界点都是最终周期而非周期时,R 在 $J(R)$(此时 $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$)上是遍历的[Re1],且在$\hat{\mathscr{C}}$上遍历的有理函数在有理函数空间 Rat_d 中形成一个正测度集[Re2].

注 当 $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$时,讨论 R 的递归性与遍历性是很有必要的,而当 $J(R) \neq \hat{\mathscr{C}}$时,在许多情况下 $\mathrm{mes}J(R) = 0$, 此时上面的讨论是平凡的. 当 $J(R) \neq \hat{\mathscr{C}}$ 时是否一定有 $\mathrm{mes}J(R) = 0$ 是一个很有意义的问题(见 § 4.3).

§ 4.2 双曲有理函数与次双曲有理函数

鉴于有理函数在其 Julia 集上的动力学性质的复杂性,本节讨论一类极为重要而其动力学性质相对简单的有理函数——双曲有理函数.

先引进光滑动力系统理论中的标准定义. 设 M 是一个光滑的 Riemann 流形,$f: M \mapsto M$ 是一个 C^1-光滑映射,又设 $X \subset M$ 是 f-不变紧

子集，$f(X) \subset X$，记 $Df_x : T_xM \mapsto T_{f(x)}M$（或简记为 D$f$）是 $x \in M$ 的一阶导数，即 x 点的切空间上的诱导线性映射.

定义 4.5 称映射 f 在其不变紧子集 $X \subset M$ 上是扩张的，如果存在常数 $c > 0, k > 1$，使得对每个 $x \in M, v \in T_xM$ 及 $n \geqslant 0$，都有

$$\| Df^n(v) \| \geqslant ck^n \| v \| . \qquad (4.1)$$

这里，$\| v \|$ 表示向量 $v \in T_xM$ 的 Riemann 模.

一个完全等价的定义是：存在固定的 $n \geqslant 1$，使得对 X 上的任意非零切向量 v，成立

$$\| \mathrm{D}f^n(v) \| > \| v \| . \qquad (4.2)$$

由于 X 是紧集，上述定义不依赖于 Riemann 度量的选取.

对于有理函数 R, $X \subset \hat{\mathscr{C}}$ 是 R-不变紧子集，则 R 在 X 上扩张的定义中，度量可取为球面度量. 另外，若 X 是 $\hat{\mathscr{C}}$ 的真紧子集，则可取到 X 的邻域 U，使其成为双曲 Riemann 曲面，因此在 U 上有双曲度量 ω. 注意到 ω 与球面度量成比例且在紧集 X 上是等价的，我们可用度量 ω 代替球面度量且不改变扩张的定义，而当 $\infty \notin X$ 时，欧氏度量也适用于扩张的定义，因此，在有理函数情形(4.1)式可以改写为：对任意 $z \in X$, $n \geqslant 0$,

$$|(R^n)'(z)| \geqslant ck^n. \qquad (4.3)$$

这里，我们在合适的度量下求导数及其模长，度量可以是球面度量、欧氏度量或双曲度量 ω.

定义 4.6 一个有理函数 $R : \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$, $\deg R \geqslant 2$，称为双曲的，如果 R 在 Julia 集 $J(R)$ 上是扩张的.

记 $C = C(R)$ 为 R 的临界点集，$O_R(C)$ 是临界点的正向轨道的并集，我们有下面的定理.

定理 4.2 设 $R : \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是 $\deg R \geqslant 2$ 的有理函数，那么下列条件等价：

1) R 是双曲的，即在 $J(R)$ 上扩张；

2) $\overline{O_R(C)} \cap J(R) = \varnothing$;

3) 每个临界点的正向轨道收敛于某个吸引(或超吸引)周期轨道.

证明 1)⇒2). 由 R 在 $J(R)$上的扩张定义,$C \cap J(R) = \varnothing$,故 $F(R) \neq \varnothing$. 这样,每个临界点的正向轨道都在 $F(R)$内,且最终落于周期 Fatou 分支内. 但再由扩张性质,$J(R)$上的每个周期点都只能是排斥周期点,故 R 不存在抛物 Fatou 分支和 Cremer 点. 由第三章的结论可知,每个临界轨道或者收敛于吸引或超吸引周期轨道,或者最终落于 Siegel 盘或 Herman 环内. 此时,必落于 Siegel 盘或 Herman 环的 R-不变紧子集内,因此 $\overline{O_R(C)} \cap J(R) = \varnothing$.

2) ⇒3). $C \subset F(R)$, 由推论 2.6,定理 3.6,$F(R)$没有抛物周期分支、Siegel 盘和 Herman 环,故由 Sullivan 分类定理可知,每个临界轨道收敛于吸引或超吸引循环.

3) ⇒1). 已知 $C \subset F(R) \neq \varnothing$, 记 W_0 为 R 的吸引和超吸引循环的 R-不变邻域之并, $R(W_0) \subset W_0$. 由于每个临界轨道最终都将落于 W_0,则存在 n,使得 $W = R^{-n}(W_0) \supset C$. 令 $U = \hat{\mathscr{C}} \setminus W$, 那么,$U$ 是 $J(R)$的一个邻域,且是双曲区域, $R^{-1}(U) \subsetneq U$. 注意到 $U \cap \overline{O_R(C)} = \varnothing$,$U$ 内不含有 R^{-1}的分支点,故 R^{-1}可提升为 U 的万有覆盖 Δ 上的解析映射 $\hat{R}^{-1}$,仍有 $\hat{R}^{-1}(\Delta) \subsetneq \Delta$, 由 Schwartz 引理可知,$\hat{R}^{-1}$是 Δ 上严格压缩的双曲度量,即其双曲导数 $|(\hat{R}^{-1})'(w)|_\Delta < 1 (w \in \Delta)$, 因此,对应地,$R$ 在 U 上的双曲导数 $|R'(z)|_w > 1 (z \in R^{-1}(U))$. 由 $J(R) \subset R^{-1}(U)$, 即得 R 在 $J(R)$上扩张. 证毕.

我们将看到双曲有理函数还有其他一些重要性质. 例如,如果 R 是双曲的,那么在 R 附近的有理函数都是双曲的. 进一步,在下一章中我们可以看到,双曲有理函数的 Julia 集在某种意义下连续地依赖于函数的改变.

从定理 4.2 可以看出,若 R 是双曲的,则 R 只有吸引和超吸引周期 Fatou 分支,Fatou 集内每一点的轨道收敛到吸引或超吸引循环. 但是反过来的结论不成立,即若 R 只有吸引和超吸引周期 Fatou 分支,R 也可能不是双曲的,典型的例子如第二章的例 2.2, $R(z) = z^2 - 2$,

$F(R)$只有一个超吸引不变分支，但临界点 0 最终落于排斥不动点 2，因而 $0 \in J(R)$.

Douady 和 Hubbard[DH]利用 Thurston 的想法，考虑了如例 2.2 的一类有理函数，如果允许 Riemann 度量在某些点带有代数奇点，如 $|\mathrm{d}\sqrt[n]{z}|$，那么可以取到合适的度量，使得如例 2.2 的有理函数——称为次双曲有理函数，在 Julia 集上也有扩张性质.

定义 4.7 Riemann 曲面上的一个共形度量称为是 orbifold 度量，如果它在局部单值化参数下有表达式 $\gamma(z)|\mathrm{d}z|$，其中$\gamma(z)$除了在一个离散点列 $a_1, a_2, \cdots$ 外是光滑和非零的，而在点 a_j 处，存在整数 $\nu_j \geqslant 2$，使得在局部坐标变换 $z(w) = a_j + w^{\nu_j}$ 下，诱导的局部度量 $\gamma(z(w))|(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)\mathrm{d}w|$ 是 w 平面上原点的某个邻域内光滑的无奇点的 Riemann 度量.

称 a_j 是 orbifold 度量的奇点，ν_j 为奇点 a_j 的分支指标.

定义 4.8 有理函数 $R: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$, $\deg R \geqslant 2$，称为是次双曲的，如果存在 Julia 集 $J(R)$的某个邻域上的 orbifold 度量 ω，使得在度量 ω 下，R 在$J(R)$上是扩张的.

为了刻画次双曲有理函数的动力学性质，我们先简要地介绍一下 Thurston 的 orbifold 的概念. 在 Riemann 曲面的情形，定义可简单地叙述如下.

定义 4.9 设 S 是一 Riemann 曲面，$\nu: S \mapsto \{1, 2, 3, \cdots\}$是一函数，除了一个孤立点集$\{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$外满足 $\nu(z) = 1 (z \in S)$，在$\{a_j\}$上，$\nu(a_j) \geqslant 2$，那么，称(S, ν)为一个 Riemann 曲面 orbifold，称 a_j 是分支点，$\nu_j = \nu(a_j)$ 为分支指标，函数 ν 称为分支函数.

关于 orbifold 的一般概念可参看文献[Thu,DH2]，下面我们不加证明地给出 Riemann 曲面 orbifold 的一些基本性质.

定义 4.10 设(S', μ)与(S, ν)是两个 orbifold，$f: S' \mapsto S$ 是分支覆盖，满足：

$$\deg_z f \cdot \mu(z) = \nu(f(z)), \tag{4.4}$$

这里，$\deg_z f$ 是分支覆盖 f 在 z 点的局部度，则称 f 是(S', μ)到(S, ν)

的覆盖映射. 特别地,如果 S' 是单连通的,且 $\mu\equiv 1$,则称 S' 是 (S, ν) 的万有覆盖,记为 $\widetilde{S}_\nu$.

与 Riemann 曲面一样,可以定义 orbifold (S, ν) 的 Euler 示性数 $\chi(S, \nu)$,它是一个有理数,

$$\chi(S, \nu) = \chi(S) + \sum_j \left(\frac{1}{\nu(a_j)} - 1 \right). \qquad (4.5)$$

这里,$\chi(S)$ 是曲面 S 的 Euler 示性数. 显然,$\chi(S, \nu) < \chi(S) \leqslant 2$.

如果 (S', μ) 与 (S, ν) 的万有覆盖存在,那么,下面的事实是容易验证的(只要验算局部度).

引理 4.2 设 (S', μ) 与 (S, ν) 是两个 orbifold,则

1) 如果 $f: S' \mapsto S$ 是分支覆盖,满足 $\deg_z f \cdot \mu(z)$ 是 $\nu(f(z))$ 的因子,则多值函数 $f^{-1}: S \mapsto S'$ 可提升为万有覆盖 $\widetilde{S}_\nu \mapsto \widetilde{S'}_\mu$ 上的单值函数;

2) 如果 $f: (S', \mu) \mapsto (S, \nu)$ 是覆盖映射,则可提升为万有覆盖 $\widetilde{S'}_\mu$ 到 $\widetilde{S}_\nu$ 的共形同构,反之亦然;

3) 如果 $f: (S', \mu) \mapsto (S, \nu)$ 是覆盖映射,且有有限度 d,则有下面的 Riemann-Hurwitz 公式:

$$\chi(S', \mu) = \mathrm{d} \cdot \chi(S, \nu). \qquad (4.6)$$

下面的引理是关键,其证明参见文献[Thu].

引理 4.3 设 $S \subseteq \hat{\mathscr{C}}$.

1) 如果 $(\hat{\mathscr{C}} \backslash S)$ 的个数 $\#(\hat{\mathscr{C}} \backslash S) < \infty$,那么,当 $\chi(S, \nu) \leqslant 0$ 时,万有覆盖 $\widetilde{S}_\nu$ 存在,且如果 $\chi(S, \nu) < 0$,则 $\widetilde{S}_\nu$ 是双曲的;如果 $\chi(S, \nu) = 0$,则 $\widetilde{S}_\nu$ 是抛物的;

2) 如果 $\#(\hat{\mathscr{C}} \backslash S) = \infty$,那么万有覆盖 $\widetilde{S}_\nu$ 一定存在且是双曲的.

现在我们可以叙述下面的定理.

定理 4.3 有理函数 $R: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是次双曲的充要条件为

1) 每个属于 $J(R)$ 的临界轨道是最终周期的;且

2）每个不属于$J(R)$的临界轨道收敛于吸引(或超吸引)周期轨道.

证明 必要性的证明与定理 4.2 的证明类似. 如果$J(R)$的邻域内定义了 orbifold 度量 ω,使得 R 在度量 ω 下是扩张的,那么,对于临界点 $c \in J(R)$,每个像$R^n(c)$的点一定是度量 ω 的某个奇点 a_j. 事实上,由于 c 也是 R^n 的临界点,若$R^n(c)$不是 ω 的奇点,则必有 $\|(R^n)'(c)\| = 0$,这与扩张矛盾. 由于$\{a_j\}$是离散的,故$\{R^n(c)\}$没有聚点,因此是有限集,即 c 为最终周期的. 对于 $c \in F(R)$,证明与定理 4.2 的证明完全一样.

充分性:设 R 满足 1)与 2). 我们要取$J(R)$的一个邻域 S 且构造 S 上的分支函数 ν,使(S, ν)为 orbifold. 同定理 4.2 的证明,取 W_0 为 R 的吸引和超吸引循环的 R-不变邻域之并,由 2),存在 n,使得 $W = R^{-n}(W_0)$ 包含所有在$F(R)$内的临界点. 现设 $S = \hat{\mathscr{C}} \backslash W$,那么 S 是 $J(R)$的邻域且每个临界点 $c \in S$,都有 $c \in J(R)$ 且其轨道是最终周期的. 下面构造分支函数 ν,我们要求满足下面的条件:

对任意 $z \in S$,其像点的分支指标 $\nu(R(z))$是乘积 $\deg_z R \cdot \nu(z)$的倍数,这里 $\deg_z R$ 是 R 在 z 点的局部度.

具体构造如下:若 z 不在临界轨道内,即 z 的任何迭代逆像$R^{-n}(z)$不含有临界点,则 $\nu(z) = 1$;若 $z = a_j$ 属于某个临界轨道,则$\nu(a_j)$归纳定义为 $\deg_{z_i} R \cdot \nu(z_i)$的最小公倍数,这里 $z_i \in R^{-1}(a_j)$,$i = 1, 2, \cdots, d_j \leqslant d$. 注意到临界轨道在 S 内是有限的,故$\nu(a_j)$是有限的,于是(S, ν)定义了一个 orbifold,分支点为临界轨道中的点,这是一个有限点集.

如果 $F(R) \neq \varnothing$,则 $W = R^{-n}(W_0)$ 有内点,$\#(\hat{\mathscr{C}} \backslash S) = \# W = \infty$,故由引理 4.1,$(S, \nu)$有万有覆盖 $\widetilde{S}_\nu \approx \Delta$,$\pi: \widetilde{S}_\nu \mapsto (S, \nu)$ 是覆盖映射. 由(4.4)式,π 在 $w \in \widetilde{S}_\nu$ 的局部度 $\deg_w \pi = \nu(f(w))$,另一方面,由构造,$\deg_z R \cdot \nu(z)$是$\nu(R(z))$的因子,$z \in S$,因此,由引理 4.2 的 1)可知,多值映射 $R^{-1}: S \mapsto S$ 可以提升为$\widetilde{S}_\nu \approx \Delta$ 上的单值映射 $g: \widetilde{S}_\nu \mapsto \widetilde{S}_\nu$. 与定理 4.2 证明一样,$g$ 为$\widetilde{S}_\nu$上严格压缩的双曲度量 ω_0. 记 $\omega =$

$(\pi^{-1})^*\omega_0$ 为 S 上诱导的度量，那么 ω 是一个 orbifold 度量，且 R 在度量 ω 下是扩张的.

如果 $F(R)=\varnothing$，则 $S=\hat{\mathscr{C}}=J(R)$，我们证明 $\chi(S,\nu)\leqslant 0$. 事实上，由于 $\deg_z R\cdot\nu(z)$ 是 $\nu(R(z))$ 的因子，$\deg_z R\cdot\nu(z)\leqslant\nu(R(z))$，故

$$\left(\frac{1}{\nu(R(z))}-1\right)\deg_z R\leqslant\frac{1}{\nu(z)}-1-(\deg_z R-1).$$

记 $d=\deg R\geqslant 2$，对所有的 $z\in\hat{\mathscr{C}}$ 求和，得

$$d\sum\left(\frac{1}{\nu(z)}-1\right)\leqslant\sum\left(\frac{1}{\nu(z)-1}\right)-(2d-2).$$

注意到 $\chi(\hat{\mathscr{C}})=2$，即得 $\chi(S,\nu)\leqslant 0$，并且，$\chi(S,\nu)=0$ 的充要条件是，对任意 $z\in S$，

$$\deg_z R\cdot\nu(z)=\nu(R(z)).\tag{4.7}$$

由引理 4.3，(S,ν) 的万有覆盖 $\widetilde{S}_\nu$ 存在，$\pi:\widetilde{S}_\nu\mapsto(S,\nu)$ 为覆盖映射. 如果 $\chi(S,\nu)<0$，那么 $\widetilde{S}_\nu\approx\Delta$. 同样，$R^{-1}$ 可提升为 $\widetilde{S}_\nu$ 上的单值映射 g. 注意到此时(4.7)式不成立，由引理 4.2 的 2)可知，g 不是 $\widetilde{S}_\nu$ 上的共形自同构，因此，由 Schwarz 引理知道，g 为 $\widetilde{S}_\nu$ 上严格压缩的双曲度量 ω_0，因此 R 在度量 $\omega=(\pi^{-1})^*\omega_0$ 下是扩张的.

如果 $\chi(S,\nu)=0$，那么 $\widetilde{S}_\nu\approx\mathscr{C}$. 由(4.7)式及引理 4.3 可知，$R$ 可提升为 $\mathscr{C}$ 到自身的共形自同构 g，g 必有形式 $g(z)=az+b$. 注意到 $\mathscr{C}$ 到 $\hat{\mathscr{C}}$ 的分支覆盖 f 是 Weiestrass 椭圆函数 $\mathscr{P}$，我们得到 $\deg R=|a|^2>1$，因此，g 在欧氏度量下是扩张的，这就证明了 R 在 π 诱导的 orbifold度量下是扩张的. 证毕.

容易看出，如果 R 是次双曲的，则 Julia 集上的每个周期点都是排斥的.

例 2.1 与例 2.3 中的有理函数是双曲的，而例 2.2 及例 2.4 中的 Lattés 例子是次双曲的.

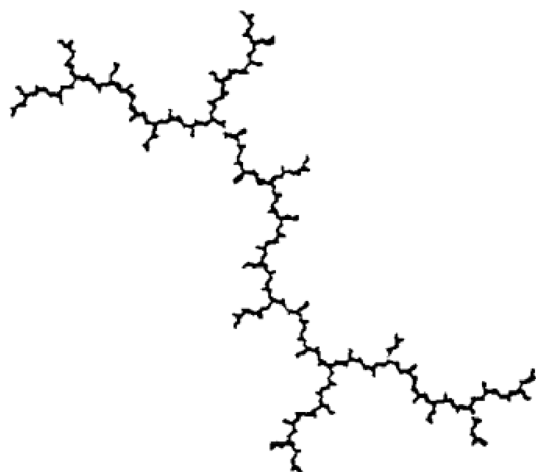


图 4.1 映射 $f(z)=z^2+\mathrm{i}$ 的 Julia 集. 0 是最终周期的：$0 \mapsto i \mapsto i-1 \circlearrowright -\mathrm{i}$

次双曲有理函数中的一个子类被称为临界有限有理函数，它有其特殊的地位. 有理函数 R 是临界有限的，如果其临界轨道的并集是有限集，等价地，每个临界轨道或者是周期的，或者是最终周期的. Thurston 对这类有理函数作了深刻的讨论[Thu,DH2]，图 4.1 给出了临界有限有理函数的一个例子.

一类更广的有理函数是几何有限有理函数，它允许有抛物循环存在，其名称来源于 Klein 群理论.

定义 4.11 有理函数 $R:\hat{\mathscr{C}}\mapsto\hat{\mathscr{C}}$ 称为几何有限的，如果 R 的临界点集的正向轨道的闭包与 $J(R)$ 只交于有限个点，即 $\#(\overline{(O_R(C))}\cap J(R))<\infty$.

定理 4.4 有理函数 R 是几何有限的充要条件是：

1）每个属于 $J(R)$ 的临界轨道最终落于排斥或有理中性周期轨道；

2）每个属于 $F(R)$ 的临界轨道收敛于吸引、超吸引或有理中性周期轨道.

证明 充分性是显然的，下面证明必要性. 由条件，一个临界点若在 $J(R)$ 内，则其轨道必有限，即最终落于 $J(R)$ 内的周期轨道，但由 Sullivan 分类定理及定理 3.7 可知，R 没有 Cremer 点，故 1)成立，又由定理3.6，R 没有 Siegel 盘和 Herman 环，则由分类定理 2)成立. 证毕.

§4.3 Julia 集的测度

我们知道，有理函数 R 的 Julia 集 $J(R)$ 如果不是整个复球面，则一定没有内点，即 $J(R)$ 是无处稠密的；另一方面，从动力学角度来看，我们也希望 Julia 集相对地小，因此，考虑 $J(R)$ 的 Lebesgue 测度很有

必要. Fatou 早在本世纪初就考虑过 Julia 集的测度,并提出了下面的问题.

问题 4.1 如果有理函数 R 的 Julia 集 $J(R) \neq \hat{\mathscr{C}}$, 是否有 $\mathrm{mes}J(R) = 0$? 这里 mes 表示二维 Lebesgue 测度.

Brolin[Br]曾在一个条件(所有临界点位于同一个 Fatou 集的吸引的不变分支内)下,证明了 $\mathrm{mes}J(R) = 0$. 利用上节的度量方法可以证明对双曲或次双曲有理函数也成立 $\mathrm{mes}J(R) = 0$ (见文献[DH1]). 本节我们将用分析的方法对较广的几何有限有理函数证明 $\mathrm{mes}J(R) = 0$, 证明的主要工具是熟知的 Koebe 的偏差定理和 Lebesgue 密度定理.

定理 4.5(Koebe 偏差定理) 记 $\Delta_r = \{|z| \leqslant r\}$, 设 $f: \Delta_r \mapsto \mathscr{C}$是一个单叶解析函数,对 $0 < t < 1$, 存在仅依赖于 t 的常数 K,使得对任意 $z_1, z_2 \in \Delta_{rt}$, 满足:

$$\frac{1}{K} \leqslant \frac{|f'(z_1)|}{|f'(z_2)|} \leqslant K, \tag{4.8}$$

称 f 在 Δ_{rt}上有有界偏差 K.

如果 $f: \Delta_r \mapsto \hat{\mathscr{C}}$,则在(4.8)式中应使用球面导数的模.

记 $\Delta_r(z) = \{\zeta \mid |\zeta - z| < r\}$,那么,可测集 X 在 z 点的密度定义为

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{mes}(X \cap \Delta_r(z))}{\pi r^2}. \tag{4.9}$$

若上式中的极限用$\overline{\lim}$或$\underline{\lim}$代替,则分别称为上密度和下密度.

定理 4.6(Lebesgue 密度定理) 设 X 是可测子集,若 $\mathrm{mes}X > 0$, 则对几乎所有的 $z \in X$, X 在 z 点的(上,下)密度等于 1.

下面考虑有理函数 R.

引理 4.4 如果 $J(R) \neq \hat{\mathscr{C}}$, 那么,对几乎所有的 $z \in J(R)$, 其轨道的极限点集 $(O_R(z))' \subset \overline{O_R(C)} \cap J(R)$.

证明 由于 $J(R) \neq \hat{\mathscr{C}}$, 因此在一个共形共轭后,可以假定$J(R)$是复平面上的一个紧集. 对任意 $\varepsilon > 0$, 记 $X_\varepsilon = \{z \in J(R) \mid \overline{\lim\limits_{m \to \infty}} d(R^m(z), \overline{O_R(C)}) > 2\varepsilon\}$, 那么,对任意 $z \in X_\varepsilon$, 存在子列 m_k,使得

$d(R^{m_k}(z),\overline{O_R(C)}) > 2\varepsilon$，因此，$R^{m_k}$在 $R^{m_k}(z)$的 2ε-邻域 $\Delta_{2\varepsilon}(R^{m_k}(z))$内可取到单值逆分支 $R_k^{-m_k}$，且将 $R^{m_k}(z)$映成 z. 记 $D_k = \Delta_\varepsilon(R^m(z))$，$C_k = R_k^{-m_k}(D_k)$，由 Koebe 偏差定理得，$R^{m_k}$在 C_k上有有界偏差 K，K 与 C_k 及 k 均无关，因此，

$$\frac{\operatorname{mes}(C_k\backslash J(R))}{\operatorname{mes}C_k} \geqslant K^{-2}\frac{\operatorname{mes}(D_k\backslash J(R))}{\operatorname{mes}D_k}.$$

现在记 R_k 是包含 C_k 的 $\Delta_k(z)$的最小半径，r_k 是包含在 C_k 内的 $\Delta_r(z)$的最大半径，仍由 Koebe 偏差定理，得 $R_k \leqslant K\cdot r_k$；另一方面，由 Julia 集的齐性定理(推论 2.11)，必定有 $r_k\to 0$，从而 $R_k\to 0$，$(k\to\infty)$，因此

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{mes}(\Delta_{R_k}(z)\backslash J(R))}{\pi R_k^2} &\geqslant K^{-2}\frac{\operatorname{mes}(\Delta_{R_k}(z)\backslash J(R))}{\pi r_k^2}\\ &\geqslant K^{-2}\frac{\operatorname{mes}(C_k\backslash J(R))}{\operatorname{mes}C_k}\\ &\geqslant K^{-4}\frac{\operatorname{mes}(D_k\backslash J(R))}{\operatorname{mes}D_k}.\end{aligned}$$

但是，$J(R)$是紧集，可以被有限多个 $\Delta_\varepsilon(z_j)$ $(j=1, 2, \cdots, N)$所覆盖. 由于 $J(R)\neq\mathscr{C}$，$b=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\operatorname{mes}(\Delta_\varepsilon(z_j)\backslash J(R))>0$，而每个 D_k 至少包含一个 $\Delta_\varepsilon(z_j)$，故 $\operatorname{mes}(D_k\backslash J(R))\geqslant b>0$，因此

$$\frac{\operatorname{mes}(D_k\backslash J(R))}{\operatorname{mes}D_k}\geqslant\frac{b}{\pi\varepsilon^2}>0,$$

$$\frac{\operatorname{mes}(\Delta_{R_k}(z)\cap J(R))}{\pi R_k^2}\leqslant 1-\frac{b}{\pi\varepsilon^2K^4}<1.$$

这说明了$J(R)$在 z 点的下密度小于 1，由 Lebesgue 密度定理只能有 $\operatorname{mes}X_\varepsilon = 0$. 由于 ε 是任意取得的，即得对几乎所有的 $z\in J(R)$，有 $(O_R(z))'\subset\overline{O_k(C)}\cap J(R)$. 证毕.

定理 4.7 如果 R 是几何有限的有理函数，那么或者

1) $J(R)=\hat{\mathscr{C}}$；

或者

2) $\text{mes}J(R)=0$.

证明 若 R 是几何有限的,则 $J(R)\cap\overline{O_R(C)}$ 仅由有限多个排斥周期轨道和有理中性周期轨道组成. 如果 $J(R)\neq\hat{\mathscr{C}}$, 由上述引理可知,对几乎所有的 $z\in J(R)$, 其轨道将收敛于这些周期轨道,但是,由排斥周期轨道与有理中性周期轨道的局部性质(定理 2.5 的注和定理 2.9)可知,除非 z 属于这些周期点的大轨道. 这是不可能的,而有限多个周期点的大轨道是一个可列集,测度为零,因此,只能有 $\text{mes}J(R)=0$. 证毕.

推论 4.1 双曲有理函数的 Julia 集具有零测度.

关于 Julia 集的测度,目前已有较大进展,就二次多项式 $P_c(t)=z^2+c$ 而言,若 P_c 不是无穷可重正规化的,则 $J(P_c)$的测度为零. 这样, $\text{mes}J(P_c)\neq 0$ 的参数 c 至多只有可列多个(参见文献[Lyu]). 但问题 4.1 至今仍未完全解决,目前既没有最终证明当 $J(R)\neq\hat{\mathscr{C}}$ 时, $\text{mes}J(R)=0$; 也未能找到一个有理函数 R,使 $J(R)\neq\hat{\mathscr{C}}$, 但 $\text{mes}J(R)>0$.

注 本节证明中用到的 Koebe 偏差定理在复动力系统研究中起着很大的作用. 事实上,本节的方法适用于考虑当 Julia 集包含在一条直线或圆周内时的线测度. 另外,Koebe 定理的推广已成为实动力系统的复方法中的主要工具之一.

§4.4 Julia 集的 Hausdorff 维数

除了几种特殊情况以外,Julia 集通常具有很复杂的结构,是分形集合. 本节讨论 Julia 集的 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度,先引进它们的定义.

设 X 是 $\mathscr{R}^n$ 中的子集, $\{U_i\}(i\in I)$是 $\mathscr{R}^n$ 中非空子集的有限或可数集族. 如果 $\bigcup_{i\in I}U_i\supset X$, 且它们的直径 $\text{diam}U_i=\text{Sup}\{d(x,y)\mid x,y\in U_i\}$ 满足 $0<\text{diam}U_i\leqslant\delta(i\in I)$, 则称$\{U_i\}$是 x 的一个 δ-覆盖,这

里 d 是 Euclid 度量.

定义 4.12 设 $X \subset \mathscr{R}^n, s \geqslant 0$, 对 $\forall\ \delta > 0$, 定义

$$H_\delta^s(X) = \inf\{\sum_{i\in I}(\mathrm{diam}U_i)^s \mid \{U_i\}(i \in I)\ 是\ X\ 的\ \delta\text{-}覆盖\},$$

则 $H_\delta^s(X)$是 δ 的增函数,称极限

$$H^s(X) = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^s(X) \tag{4.10}$$

为集合 X 的 s 维 Hausdorff 测度.

容易验证,H^s 是 Borel 集上的测度. 特别地,当 $s=n$ 时,如果 x 是 Borel 集,则有

$$H^n(X) = c_n \mathrm{mes}(X), \tag{4.11}$$

这里 c_n 是仅与空间维数有关的常数,mes 是 n 维 Lebesgue 测度(参见文献[Fal]).

进一步,易验证,对 $t > s$, 有

$$H_\delta^t(X) \leqslant \delta^{t-s} H_\delta^s(X),$$

因此, 如果 $H^s(X) < \infty$, 则 $H^t(X) = 0$; 如果 $H^t(X) > 0$, 则 $H^s(X) = \infty$, 于是存在 $d_0 \geqslant 0$, 当 $s < d_0$ 时, $H^s(X) = \infty$; 当 $s > d_0$ 时, $H^s(x) = 0$.

定义 4.13 称

$$d_0 = \inf\{s \mid H^s(X) = 0\} = \sup\{s \mid H^s(X) = \infty\}$$

为集合 X 的 Hausdorff 维数,简称维数,记为 $\dim_H X$ 或 $\dim X$.

当 $s = \dim X$ 时,$H^s(X)$可能为 0 或∞,也可能满足 $0 < H^s(X) < \infty$. 对后者讨论 Hausdorff 测度是有意义的.

下面我们要考虑的是 Julia 集的 Hausdorff 维数和测度,即限制在复平面$\mathscr{C}$上考虑. 由于 Julia 集事实上是复球面$\hat{\mathscr{C}}$中的紧集,我们对 Hausdorff 测度和维数的定义稍作修改,将定义中的 Euclid 度量改为球面度量,即 $\mathrm{diam}U$ 表示球面直径,此时 Hausdorff 维数的大小保持不变.

记 $B_r(z)=\{\zeta\in\hat{\mathscr{C}}\mid d(z,\zeta)\leqslant r\}$ 为以 z 为心、r 为半径的闭圆盘，下面的引理是计算 Hausdorff 维数的有用工具之一.

引理 4.5 设 X 是 $\hat{\mathscr{C}}$ 中的紧集，μ 是 X 上的有限测度(支集在 X 上)，$0<\mu(X)<\infty$，设 $s>0$，则

1) 如果存在 $c>0$，使得当 $r>0$ 充分小时，对任意 $z\in X$ 都有 $\mu(B_r(z))\leqslant cr^s$，则 $H^s(X)>0$，$\dim X\geqslant s$；

2) 如果存在 $c>0$，使得当 $r>0$ 充分小时，对任意 $z\in X$ 都有 $\mu(B_r(z))\geqslant cr^s$，则 $H^s(X)<\infty$，$\dim X\leqslant s$.

证明 1) 对任意 $\delta\leqslant r$，设 $\{U_i\}$ 是 X 的一个 δ-覆盖，不妨设每个 U_i 与 X 相交非空. 取 $x_i\in U_i\cap X$，$r_i=\operatorname{diam}U_i$，令 $B_i=B_{r_i}(x_i)$，则 $\{B_i\}$ 也是 X 的覆盖，于是

$$\sum_i(\operatorname{diam}U_i)^s=\sum_i r_i^s\geqslant c^{-1}\sum\mu(B_i)$$

$$\geqslant c^{-1}\mu(\bigcup B_i)=c^{-1}\mu(X)>0,$$

因此，$H_\delta^s(X)\geqslant c^{-1}\mu(X)>0$. 令 $\delta\to 0$，即得 $H^s(X)>0$，因此 $\dim X\geqslant s$.

2) 对任意充分小的 δ，取 $r=\dfrac{\delta}{4}$，满足 2)的条件，记

$$\mathscr{B}=\{B_r(x)\mid x\in X\},$$

我们按下面的过程从 $\mathscr{B}$ 中选出有限个互不相交的 $\{B_i\}$：先从 $\mathscr{B}$ 中任选一个 $B_r(x)$ 作为 B_1，再从 $\mathscr{B}$ 中与 B_1 不相交的 $B_r(x)$ 中任选一个为 B_2，设 $B_1,B_2,\cdots,B_{n-1}$ 已选定，如果 $\mathscr{B}$ 中任意的 $B_r(x)$ 均与某个 $B_i(i=1,\cdots,n-1)$ 相交，则不再选取，过程结束，否则从 $\mathscr{B}$ 中与 $B_1,B_2,\cdots,B_{n-1}$ 均不相交的 $B_r(x)$ 中任选一个为 B_n，如此下去，直到选不出不相交的 $B_r(x)$ 为止. 由于 X 是紧集，过程在有限步后结束，于是 $\{B_i\}$ 被选定. 现记 $\widetilde{B}_i$ 是与 B_i 有相同圆心，而半径为 $\delta=4r$ 的闭圆盘，则 $\{\widetilde{B}_i\}$ 是 X 的一个 δ-覆盖. 事实上，若有 $x\in X$ 不属于任意 $\widetilde{B}_i$，则 $B_r(x)\in\mathscr{B}$ 但 $B_r(x)$ 与每个 B_i 不相交，这与 $\{B_i\}$ 的选取矛盾，因此

$$H_\delta^s(X) \leqslant \sum_i (\text{diam } \widetilde{B}_i)^s = 4^s \sum_i (\text{diam} B_i)^s$$
$$= \delta^s \sum_i r^s \leqslant \delta^s c^{-1} \sum_i \mu(B_i)$$
$$= \delta^s c^{-1} \mu(\bigcup_i B_i) = \delta^s c^{-1} \mu(x) < \infty.$$

令 $\delta \to 0$,得 $H^s(X) < \infty$,因此 $\dim X \leqslant s$. 证毕.

推论 4.2 如果存在 $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$,使得当 r 充分小时,对任意 $x \in X$ 均有

$$c_1 r^s \leqslant \mu(B_r(x)) \leqslant c_2 r^s, \tag{4.12}$$

则 $\dim X = s$,且 $0 < H^s(X) < \infty$.

现在讨论有理函数 R 的 Julia 集,下面的讨论都是在球面度量下进行的,导数是指球面导数.

定理 4.8 设 R 是有理函数,$d = \deg R \geqslant 2$,则存在 Julia 集$J(R)$上的正有限测度 μ 以及实数 $\delta = \delta(R)$,使得对任何 Borel 集 $A \subset J(R)$,R 在 A 上是单射,即有

$$\mu(R(A)) = \int_A |R'(z)|^\delta \mathrm{d}\mu(z), \tag{4.13}$$

而且,$0 < \delta(R) \leqslant 2$. 如果又有某个 δ 及测度 μ 使得(4.13)式成立,则 $\delta \geqslant \delta(R)$.

称满足(4.13)式的测度 μ 为指数为 δ 的共形测度.

证明 如果 $J(R) = \hat{\mathscr{C}}$,则取 μ 为 Lebesgue 测度,$\delta = 2$. 现假设 $J(R) \neq \hat{\mathscr{C}}$,那么,由引理 3.1,存在开集$U \subset \hat{\mathscr{C}} \backslash J(R)$,使得每个 R^{-n}的所有分支 R_j^{-n} 在 U 上有定义(单值),且每条逆分支的轨道 $R_{j_1}^{-1}(U)$,$R_{j_2}^{-1}(R_{j_1}^{-1}(U))$,…均互不相交且一致收敛到 $J(R)$上(当 U 包含在 Siegel 盘或 Herman 环内时,有一条例外的逆分支轨道,这时,我们不考虑这条例外的逆分支轨道).

对每个 $x \in U$,记$I(x)$表示所有的点$R_j^{-n}(x)$组成的集合(不含例外逆分支轨道). 对于 $y \in I(x)$,$R^n(y) = x$,定义$d(y) = |(R^n)'(y)|^{-1}$

(球面导数)，由于 U 的所有逆像是互不相交的，而整个复球面的球面面积是有限的，故 $\sum\int_{U}|(R_j^{-n})'(z)|^2\mathrm{d}\sigma<\infty$，这里 $\mathrm{d}\sigma$ 为球面面积元素，由 Lebesgue 单调收敛定理，对几乎每个 $x\in U$，

$$\sum_{y\in I(x)} d(y)^2<\infty. \tag{4.14}$$

取 $x=x_0\in U$ 使得级数(4.14)收敛，定义

$$\delta=\inf\left\{s\,\Big|\,\sum_{y\in I(x_0)} d(y)^s<\infty\right\},$$

分两种情形来构造共形测度 μ.

情形一：如果 $\sum_{y\in I(x_0)} d(y)^{\delta}=\infty$.

对 $s>\delta$，定义测度 μ_s 如下：对每个 $y\in I(x_0)$，给定原子质量 $d(y)^s/\sum d(y)^s$，则 μ_s 总质量为 1，令 $s\to\delta$，那么，μ_s 有子列弱收敛于一个有限测度 μ. 由于 $I(x_0)$ 的极限点集包含在 $J(R)$ 内，故 μ 的支撑集包含在 $J(R)\cup I(x_0)$ 上，但由假定对每个 $y\in I(x_0)$，μ 在 y 上的质量为 0，故 μ 的支撑集为 $J(R)$，且 $\mu(J(R))=1$.

对任意 $z_0\in J(R)$，V 是 z_0 的邻域，如果 z_0 不是 R 的临界点，则当 V 充分小时，R 在 V 上是单射，故 R 是 $I(x_0)\cap V$ 到 $I(x_0)\cap R(V)$ 间的一一映射，且当 $z\in V$ 时，$1-\varepsilon\leqslant\left|\dfrac{R'(z)}{R'(z_0)}\right|\leqslant 1+\varepsilon$，当 V 收缩到 z_0 时，$\varepsilon\to 0$，因此，由

$$\begin{aligned}\mu_s(R(V)) &= \sum_{y\in I(x_0)\cap R(V)} d(y)^s \\ &= \sum_{z\in I(x_0)\cap V} d(z)^s\cdot|R'(z)|^s \end{aligned} \tag{4.15}$$

得

$$(1-\varepsilon)|R'(z_0)|^s\mu_s(V)\leqslant\mu_s(R(V))\leqslant(1+\varepsilon)|R'(z_0)|^s\mu_s(V).$$

令 $s\to\delta$，再让 V 收缩到 z_0，即得：如果 z_0 是 μ 的原子(即 $\mu(\{z_0\})\neq 0$)，那么有

$$\mu(\{R(z_0)\}) = |R'(z_0)|^\delta \mu(\{z_0\}). \qquad (4.16)$$

如果 z_0 是 R 的临界点，局部度为 k，则适当选取 V 使得 R 是 $I(x_0) \cap V$ 到 $I(x_0) \cap R(V)$ 的 k 到 1 的映射，且当 $z \in V$ 时，$|R(z)| < \varepsilon$，当 V 收缩到 z_0 时，$\varepsilon \to 0$，因此，$\mu_s(RV)) \leqslant k \cdot \varepsilon$. 令 $s \to \delta$，再让 V 收缩到 z_0，得 $\mu(\{R(z_0)\}) = 0$，于是，当 z_0 是原子时，仍成立

$$\mu(\{R(z_0)\}) = |R'(z_0)|^\delta \mu(\{z_0\}) = 0. \qquad (4.17)$$

令 J_0 是 $J(R)$ 除掉所有临界点后的子集，则 R 在 J_0 上是局部单射，在每个局部单射部分，(4.15)式可改写为

$$\mu_s(R(V)) = \int_V |R'(z)|^s \mathrm{d}\mu_s(z).$$

令 $s \to \delta$ 得

$$\mu(R(V)) = \int_V |R'(z)|^\delta \mathrm{d}\mu(z).$$

由于 μ 以 $J(R)$ 为支集，(4.13)式对 A 不含临界点时成立，而当 A 含有临界点时，由(4.17)式及临界点个数有限可知，(4.13)式仍成立. 这就证明了共形测度的存在性.

情形二：如果 $\sum\limits_{y \in I(x_0)} d(y)^\delta < \infty$.

我们引进权因子 $h(x)$ 满足下述条件：

(i) $\sum\limits_{y \in I(x_0)} h(d(y))d(y)^\delta = \infty$，$\sum\limits_{y \in I(x_0)} h(d(y))d(y)^s < \infty \, (s > \delta)$.

(ii) $h(x)$ 是 x 的正值函数，当 $x \to +0$ 时，$h(x) \to +\infty$，且满足对任意 $\varepsilon > 0$，$0 < \lambda < +\infty$，存在 $x_0(\varepsilon, \lambda)$，使当 $0 < x \leqslant x_0(\varepsilon, \lambda)$ 时，$|h(\lambda x)/h(x)| \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$.

这样的 h 容易构造，于是定义测度 μ_s 如下：在 $y \in I(x_0)$ 上给定原子质量 $h(d(y))d(y)^s / C(s)$，这里规范化因子 $C(s)$ 使 μ_s 的总质量为 1. 与情形一同样的讨论便可得到 μ_s 的弱极限 μ 是共形测度，即(4.13)式成立.

上面我们证明了共形测度的存在性. 另外，若 μ_n 是指数为 δ_n 的共形测度，则 μ_n 的弱极限也为共形测度(共形测度全体在弱收敛下是闭

的)，因此，我们可以取到共形测度 μ 使得其指数 $\delta=\delta(R)$ 为最小.

最后证明 $\delta>0$，如果 $\delta=0$，则由(4.16)式，μ 没有原子，否则有一条逆轨道包含无穷多个点，而每个点有相同的原子质量，这与总质量有限矛盾. 现在令 J_0 是$J(R)$除去临界值后的子集，则仍有 $\mu(J_0)=\mu(J(R))=1$. 又 $R^{-1}(J_0)$ 可分解为 d 个部分 $J_1, J_2, \cdots, J_d$，使得 $R(J_i)=J_0$ 且 $R: J_i \mapsto J_0$ 是单射，$i=1, 2, \cdots, d$，于是由(4.13)式，$\mu(J_i)=\mu(J_0)=1$，$\mu(J(R)) \geqslant \sum \mu(J_i)=d$，这与总质量为 1 矛盾，从而证得定理. 证毕.

如果 R 是双曲的有理函数，那么共形测度 μ 的指数 δ 就正好是 $J(R)$的 Hausdorff 维数.

定理 4.9 设 R 是双曲有理函数，μ 是 $J(R)$上的共形测度，指数 $\delta=\delta(R)$，$\mu(J(R))=1$，那么，$J(R)$的 Hausdorff 维数 $\dim J(R)=\delta$，且 $0<\dim J(R)<2, 0<H^{\delta}(J(R))<\infty$.

证明 如果 R 是双曲的，那么，对任意 $z \in J(R)$，存在某个 n，使 $|(R^n)'(z)|>1$ (球面导数). 等价地，存在某个 m，使得对任意 $z \in J(R)$，$|(R^m)'(z)|>1$. 由于$J(R)=J(R^m)$，我们可考虑 R^m，为方便仍记 R^m 为 R，即假定对任意 $z \in J(R)$，$|R'(z)|>1$.

又存在$J(R)$的邻域U 使在其内满足$M \geqslant |R'(z)| \geqslant \lambda>1$，故 R 在 U 内是局部单叶的. 存在常数 $a>0$，使得对任意 $z \in J(R)$，R 在 $B_{2a}(z)$ 内是单叶的. 这样，对任意 $z_0 \in J(R)$ 及任意 $r>0$，如果 $R^n(B_r(z_0))$包含在某个 $B_a(z)$内 $(z \in J(R))$，则 R^n 在 $B_r(z_0)$上是单射，且由 Koebe 偏差定理，R^n 在$B_r(z_0)$内有有界偏差 K(K 是绝对常数)，即对任意 $z \in B_r(z_0)$，

$$1/K \leqslant \left|\frac{(R^n)'(z)}{(R^n)'(z_0)}\right| \leqslant K. \tag{4.18}$$

现对任意 $z_0 \in J(R)$，$r>0$ 充分小，取最大的 n 使得$(R^n)(B_r(z_0))$包含在某个 $B_a(z)$内. 由于 $|(R^n)'(z)| \geqslant |(R^n)'(z_0)|/K \quad (z \in B_r(z_0))$，故$(R^n)(B_r(z_0))$包含一个圆心在$J(R)$上、半径为$|(R^n)'(z_0)| \cdot r/K$ 的圆，因此

$$|(R^n)'(z_0)| \cdot r \leqslant K \cdot a. \qquad (4.19)$$

又由(4.18)式，$|(R^{n+1})'(z)| = |(R^n)'(z)||R'(R^n(z))| \leqslant MK|(R^n)'(z_0)|$，$z \in B_r(z_0)$，故$(R^{n+1})(B_r(z_0))$包含在一个圆心在$J(R)$上、半径为$MK|(R^n)'(z_0)| \cdot r$的圆内. 由于$n$是最大的，故得

$$|(R^n)'(z_0)| \cdot r \geqslant a/MK. \qquad (4.20)$$

另一方面，由(4.18)式、(4.20)式，$|(R^n)'(z)| \geqslant |(R^n)'(z_0)|/K \geqslant a/MK^2r$，$z \in B_r(z_0)$，故$(R^n)(B_r(z_0))$包含一个圆心在$J(R)$上、半径至少为$b = \dfrac{a}{MK^2}$的圆盘.

下面证明：对任意$z \in J(R)$，$\mu(B_b(z)) \geqslant c > 0$.

因为存在有限个闭圆盘$B_i = B_{b/4}(z_i)$，$z_i \in J(R)$，$i = 1, 2, \cdots, k$，覆盖$J(R)$，所以$B_b(z)$必包含某个B_i，对每个B_i，由齐性定理，存在n_i，使$R^{n_i}(B_i \cap J(R)) = J(R)$. 注意到$R^{n_i}$在$J(R)$上没有临界点，所以存在Borel集$A \subset B_i \cap J(R)$，使得$R^{n_i}(A) = J(R)$且$R^{n_i}: A \mapsto J(R)$是单射. 由(4.13)式，

$$\begin{aligned} 1 = \mu(J(R)) &= \int_A |(R^{n_i})'(z)|^\delta \mathrm{d}\mu(z) \\ &\leqslant M^{n_i\delta}\mu(A) \\ &\leqslant M^{n_i\delta}\mu(B_i). \end{aligned}$$

令$c = 1/\max M^{n_i\delta}$，则$\mu(B_b(z)) \geqslant \mu(B_i) \geqslant c > 0$.

回过来考虑$B_r(z_0)$，有$\mu(R^n(B_r(z_0))) \geqslant \mu(B_b(z)) \geqslant c$. 再由(4.13)式及(4.18)式，

$$\begin{aligned} K^{-\delta}|(R^n)'(z_0)|^\delta \mu(B_r(z_0)) &\leqslant \mu(R^n(B_r(z_0))) \\ &\leqslant K^\delta |(R^n)'(z_0)|^\delta \mu(B_r(z_0)), \end{aligned}$$

于是由(4.19)式、(4.20)式，

$$\frac{c}{K^{2\delta}a^\delta} \cdot r^\delta \leqslant \frac{\mu(R^n(B_r(z_0)))}{K^\delta |(R^n)'(z_0)|^\delta r^\delta} \cdot r^\delta$$

$$\leqslant \mu(B_r(z_0))$$

$$\leqslant \frac{K^\delta \mu(R^n(B_r(z_0)))}{|(R^n)'(z_0)|^\delta \cdot r^\delta} \cdot r^\delta$$

$$\leqslant M^\delta K^{2\delta} \cdot a^\delta r^\delta.$$

由推论 4.2, $\dim J(R) = \delta$,且 $0 < H^\delta(J(R)) < \infty$.

定理 4.8 保证了 $0 < \dim J(R) \leqslant 2$. 如果 $\dim J(R) = 2$, 则由(4.11)式,H^2 等价于平面 Lebesgue 测度 mes,故 $0 < \text{mes}(J(R)) < \infty$. 但 R 是双曲的,推论 4.1 告诉我们 $\text{mes}(J(R))=0$,可见得出矛盾,因此, $0 < \dim J(R) < 2$. 证毕.

利用(4.13)式,我们还可得到 $J(R)$的 Hausdorff 维数的下界:

$$\dim J(R) \geqslant \frac{\log d}{\max\limits_{z\in J(R)} \log |R'(z)|}, \qquad (4.21)$$

这里 $d = \deg R$, 上式当 $R(z) = z^d$ 时达到下界.

注 Garber[Gar]利用更简单的测度构造,对一切有理函数证明了(4.21)式,故 $\dim J(R) > 0$ 对一切有理函数成立. 但由于$J(R)$可能为整个$\hat{\mathscr{C}}$,故此时 $\dim J(R) = 2$, 于是一个重要的问题是:如果 $J(R) \neq \hat{\mathscr{C}}$, 是否有 $\dim J(R) < 2$? M. Shishikura 在文献[Shi]中给出了这样的例子:设 $P_c(z) = z^2 + c$, 则存在无穷多个 c,使得 $\dim J(P_c) = 2$. 这进一步说明了 Julia 集的复杂性.

注 在双曲的情形,Sullivan 事实上证明了共形测度是唯一的,且等价于 Hausdorff 测度;在共形测度下,R 在 Julia 集上是遍历的,见文献[Sul]. Sullivan 还提出:在双曲情形,Julia 集的 Hausdorff 维数是否解析要依赖于 R 的系数,关于这个问题 Ruelle 在文献[Ru]中给出了一个肯定的回答,特别地,对 $P_c(z) = z^2 + c$, 当 $|c|$ 充分小时,$J(P_c)$的 Hausdorff 维数有如下展开式:

$$\dim J(P_c) = 1 + \frac{|c|^2}{4\log 2} + o(|c|^2).$$

关于非双曲时共形测度的研究,参见 Przytycki 等人的文章.

参考文献

[Gar] V. L. Garber, On the iteration of rational functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 84 (1978) 497-505.

[Shi] M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets.* Preprint IMS. SUNY Stony Brook (7) 1991.

[Lyu] M. Lyubich, *On the Lebesgue measure of the Julia set of quadratic polynomials.* Preprint IMS. SUNY Stony Brook (10) 1991.

[Ru] D. Rulle, Repellers for real analytic maps. *Erg. Th. and Dyn. Sys.* 2 (1982) 99-107.

[Wal] P. Walters, *An Introduction to Ergotic Theory.* Springer-Verlag 1982.

[Re1] M. Rees, Ergotic rational maps with dense critical point forward orbit. *Erg. Th. and Dyn. Sys.* 4 (1984) 311-322.

[Re2] M. Rees, Positive measure sets of ergotic rational maps. *Ann. Sci. Ecole Norn. Sup.* 19(1986) 383-457.

[DH1] A. Douady and J. H. Hubbard, Étude dynamique de polynômes complexes. *Publ. Math. d'Orsay* No. 2, 1984; No. 5, 1985.

[Thu] W. Thurston, *On the combinatorics of iterated rational maps.* Preprint. Princeton Univ. and Inst. Adv. Study 1985.

[DH2] A. Douady and J. H. Hubbard, *A proof of Thurston's topological characterization of rational functions.* Preprint. Inst. Mattag-Leffler(2) 1985.

[Mil] J. Milnor, *Dynamics in one complex veriable: Introductory lectures.* Preprint. IMS. SUNY Stony Brook (5) 1990.

[Br] H. Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions. *Arkiv. for Mat.* 6(1965) 103-144.

[Fal] K. J. Falconer, *The Geometry of fractal sets.* Cambridge Univ. Press. 1985.

[Sul] D. Sullivan, Conformal dynamical systems. *Lecture Notes in Math.* 1007 (1983) 725-752.

第五章　有理函数的全纯簇和结构稳定性

在前面几章中，我们考虑了单个有理函数在其动力学平面(即 z 平面)上的动力学，给出了 Fatou 集上动力学的完全描述和 Julia 集的一些度量性质. 本章将讨论一族有理函数的动力学，它们解析地依赖于一些复参数，称为有理函数的全纯簇，其中最重要的是度为 $d \geqslant 2$ 的有理函数全体 Rat_d，它可以用系数参数化，我们将按动力学性质对参数空间进行分解. 早在本世纪 20 年代，Fatou 提出了下面的重要猜想：双曲有理函数在 Rat_d 中是稠密的. 这个猜想已成为复动力系统研究中的最主要问题之一，至今仍未解决. 另一与此有关的重要问题是讨论有理函数的结构稳定性，这一问题已由 Mañé, Sad. Sullivan, Thurston[Mss,ST] 和 Lyubich[Ly] 等人的工作作了完整的描述，本章将对此作介绍. 阅读本章需要了解多复变函数论的一些基本知识.

§5.1　有理函数全纯簇

§5.1.1　多复变函数简介

有理函数全纯簇是定义在复流形上的，为了以后的讨论，我们简要介绍一下多复变函数论的有关的基础知识，详细内容和进一步的了解请参阅文献[GF,GR].

设 $D \subset \mathscr{C}^n$ 是复 n 维欧氏空间中的区域，$f: D \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是 D 上全纯映射(亚纯函数)，即 f 关于自变量的每个分量是解析的，下面的唯一性定理是基本的结论.

定理 5.1(唯一性定理)　设 $f: D \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是全纯映射，如果存在 D

内开子集 D_1 使得 $f|_{D_1} \equiv 0$，那么，$f \equiv 0$.

唯一性定理对复流形上的全纯函数也成立．设 W 是一个 n 维复流形，$f: W \mapsto \hat{\mathscr{C}}$是全纯的，如果 f 在 W 的局部坐标表示下是全纯的.

定理 5.1′ 设 W 是 n 维复流形，$f: W \mapsto \hat{\mathscr{C}}$是全纯函数，如果存在 W 内的开集 W_0，使 $f|_{W_0} \equiv 0$，那么，$f \equiv 0$.

由唯一性定理，我们可得到定理 5.2.

定理 5.2 设 $A = \{w \in W | f(w) = 0\}$ 是全纯函数 $f: W \mapsto \hat{\mathscr{C}}$的零点集，那么，如果 $A \neq W$，则 A 是 W 中无处稠密的闭子集，且 $W \backslash A$ 是 W 中连通的开子集.

全纯函数的零点集 A 也称为 W 中的一个解析子集(解析子集的一般定义参见多复变的书)，当 W 是一维复流形(即为 Riemann 曲面)时，A 是孤立点集，我们不考虑这种情形. 在通常情况下，解析子集是一个带有一些奇点的复子流形之并，即在挖去一些奇点后，它的每个连通分支是复子流形，而解析子集的奇点集在这个解析子集中是无处稠密的. 我们需要讨论解析子集上的函数论.

设 A 是 W 中的解析子集，假定 $A \neq W, A \neq \varnothing, A = \{w \in W | f(w) = 0\}$，如果 g 是定义在 A 的某个邻域内的全纯函数，则称 g 在 A 上的限制 $g|_A$ 是解析子集 A 上的全纯函数. 对于解析子集上的全纯函数，唯一性定理仍成立.

定理 5.1″ 设 $A \subset W$ 是解析子集，g 是 A 上的全纯函数，$w_0 \in A$，如果存在 w_0 的邻域 W_0，使得 $g|_{W_0 \cap A} \equiv 0$，则 g 在 A 的包含 w_0 的连通分支上恒等于 0.

下面再考虑全纯函数 $f: W \times \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，以及方程 $f(w, z) = 0$，$w \in W$，$z \in \hat{\mathscr{C}}$，我们有下述隐函数定理.

定理 5.3(隐函数定理) 设 $f: W \times \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$是全纯函数，$(w_0, z_0) \in W \times \hat{\mathscr{C}}$，满足 $f(w_0, z_0) = 0$，如果 $\frac{\partial f}{\partial z}|_{w=w_0, z=z_0} \neq 0$，则存在 w_0 的邻域 $W_0 \subset W$ 以及 W_0 上全纯函数 $z(w)$，使得 $f(w, z(w)) \equiv 0$，$w \in W$，且 $z(w_0) = z_0$.

隐函数定理是局部性的.

§ 5.1.2 全纯簇和稳定性

定义 5.1 设 R_w 是度 $d \geqslant 2$ 的有理函数簇,带有参数 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in W$,这里 W 是 n 维连通复流形,如果 R_w 全纯依赖于参数 w,即映射 $R: W \times \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$, $R(w, z) = R_w(z)$ 是关于 w 和 z 的全纯函数,则称 R_w 是有理函数的全纯簇.

例 5.1 二次多项式簇 $P_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathscr{C}$,这是一个单参数簇,我们将作专门讨论.

例 5.2 $R_{\lambda,b}(z) = \lambda\left(z + \dfrac{1}{z} + b\right)$, $\lambda \in \mathscr{C}^*$, $b \in \mathscr{C}$,这是一个双参数的度 $d = 2$ 的有理函数簇,以∞为不动点,不含有多项式,在一些文献中对此有专门讨论.

我们最感兴趣的是由度为 $d(\geqslant 2)$ 的有理函数全体组成的函数族.记为 Rat_d,它可以用系数参数化,而且,Rat_d 可以嵌入到 $2d+1$ 维复射影空间$\mathscr{C}P^{2d+1}$内,其嵌入像为$\mathscr{C}P^{2d+1}$内的连通开子集,因而是一个复子流形. Rat_d 的紧开拓扑与其嵌入像在$\mathscr{C}P^{2d+1}$中的诱导拓扑是等价的.事实上,考虑形式有理函数 $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_d z^d}$,这里系数 $w = (a_0, \cdots, a_d, b_0, \cdots, b_d) \in \mathscr{C}^{2d+1} \backslash \{0\}$,注意到系数相差一非零常数因子表示同一形式有理函数,故它与$\mathscr{C}P^{2d+1}$中的点一一对应.而 $R \in \mathrm{Rat}_d$ 的充要条件为 $(P(z), Q(z)) = 1$,即它们的系数结式非零,结式为零的系数集是$\mathscr{C}P^{2d+1}$中的一个解析子集,由定理 5.2,其余集是$\mathscr{C}P^{2d+1}$中的稠密的连通开集,因此,$R \in \mathrm{Rat}_d \mapsto [w] = [(a_0, \cdots, a_d, b_0, \cdots, b_d)] \in \mathscr{C}P^{2d+1}$ 是一个嵌入映射.这里$[w]$表示等价类 $\{\lambda w \mid \lambda \in \mid \mathscr{C}_*\}$,$\mathrm{Rat}_d$ 的嵌入像是$\mathscr{C}P^{2d+1}$中的连通开集,以后我们将 Rat_d 与其嵌入像等同起来,均用 Rat_d 表示.这样,Rat_d 为一复流形,$R \in \mathrm{Rat}_d$ 可用其嵌入像$[w]$(即系数)作为参数,记为 R_w,而映射 $R: \mathrm{Rat}_d \times \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$, $R(w, z) = R_w(z)$ 是 w 与 z 的全纯映射,Rat_d 为一全纯簇.任何度为 d 的有理函数的全纯簇均可以看作 Rat_d 的一个子

复流形. 例如:所有度为 $d \geqslant 2$ 的多项式全体组成的函数族是一个全纯簇,记为 Poly_d,由其 $d+1$ 个系数参数化,是一个 $d+1$ 维复流形.

注 共形共轭的有理函数有相同的解析动力学性质. 由于 $\hat{\mathscr{C}}$ 上共形映射全体是复三维的 Möbius 群 $\left\{M: z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}\right\}$,因此,$\mathrm{Rat}_d$ 中有理函数的共形共轭等价类空间是 $2d-2$ 维的,它正好与 $R \in \mathrm{Rat}_d$ 的临界点的个数相同. 同样,Poly_d 中多项式在仿射共轭下的等价类空间是 $d-1$ 维的,与多项式的有限临界点个数相同. 以后我们可以发现临界点轨道的状态与全纯簇中有理函数的动力学分解的关系.

下面定义有理函数(在一个全纯族内)的 J-稳定性和结构稳定性.

定义 5.2 两个有理函数 $R_1, R_2 \in \mathrm{Rat}_d$ 称为是 J-共轭的,如果存在同胚 $\varphi: J(R_1) \mapsto J(R_2)$,使得 $\varphi \circ R_1|_{J(R_1)} \circ \varphi^{-1} = R_2|_{J(R_2)}$. φ 称为 J-共轭映射.

设 $W \subset \mathrm{Rat}_d$ 是子复流形, R_w, $w \in W$ 是全纯簇.

定义 5.3 设 $w_0 \in W$, 则称 R_{w_0}(在 W 内)是 J-稳定的,如果存在 w_0 的邻域 $w_0 \subset W$, 使得对任意 $w \in W_0$, R_{w_0} 与 R_w 是 J-共轭的,且其 J-共轭映射 $\varphi_w: J(R_{w_0}) \mapsto J(R_w)$连续依赖于参数 $w \in W_0$.

定义 5.4 设 $w_0 \in W$, 则称 R_{w_0}(在 W 内)是结构稳定的,如果存在 w_0 的邻域 $W_0 \subset W$, 使得对任意 $w \in W_0$, R_{w_0} 与 R_w 是拓扑共轭的,即存在同胚 $\varphi_w: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$,使得 $\varphi_w \circ R_{w_0} \circ \varphi_w^{-1} = R_w$, 且 φ_w 连续依赖于参数 $w \in W_0$.

结构稳定性表明当有理函数在全纯簇内作一扰动时保持其拓扑动力学性质,而 J-稳定则保持有理函数在 Julia 集上的拓扑动力学性质. 在以后几节中我们将着重讨论整个度为 $d \geqslant 2$ 的有理函数簇 Rat_d 上的结构稳定性和 J-稳定性,所有的结论均适合于 Rat_d 中的子族. 特别地,结论对 Poly_d 均成立.

对于 Rat_d(以及 Poly_d),下面的双曲性猜想是复解析动力系统理论中的主要猜想之一,它由 Fatou 首先提出,故也称为 Fatou 猜想.

猜想 5.1 双曲的有理函数(多项式)在 Rat_d 中(以及 Poly 中)形成一个稠密开子集.

双曲性猜想与 J-稳定性有紧密联系．对双曲性猜想的研究已成为当代复解析动力系统研究的主要课题之一．

§5.2 全纯运动和 λ-引理

在有理函数解析簇的结构稳定性和 J-稳定性的讨论中，最主要的工具是关于全纯运动的 λ-引理．首先引进全纯运动的定义．

定义 5.5 设 M 是一个单连通复流形，$\lambda_0 \in M$，$A \subset \hat{\mathscr{C}}$ 是一个子集，如果映射 $\varphi: M \times A \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 满足下列条件：

1）对固定的 $z \in A$，映射 $\lambda \mapsto \varphi(\lambda, z)$ 是 λ 的全纯函数；

2）对固定的 $\lambda \in M$，映射 $\varphi_\lambda: z \mapsto \varphi(\lambda, z)$ 是一个单射；

3）$\varphi_{\lambda_0} = id$，

则称 φ（或 φ_λ）是集合 A 上（关于参数 $\lambda \in M$）的一个全纯运动（以 λ_0 为原点）．

通常 M 取为 λ_0 的一个邻域．由于一个函数是全纯的等价于对每个变量是解析的，我们不妨假定取 M 为 $\mathscr{C}$ 中的单位圆盘 Δ，λ_0 取为圆心 O．下面就以 $\lambda \in \Delta$ 为参数讨论全纯运动，所有的讨论均适合于单连通复流形 M．

定理 5.4（λ-引理） 设 $\varphi: \Delta \times A \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是集合 $A \subset \hat{\mathscr{C}}$ 上的全纯运动，则 φ 可以连续扩充为 $\Delta \times \overline{A} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 的映射，使得 φ 也是 $\overline{A}$ 上的全纯运动，而且，对每个 $\lambda \in \Delta$，$\varphi_\lambda: \overline{A} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，$\varphi_\lambda(z) = \varphi(\lambda, z)$ 是（Person 性质意义下的）拟共形映射．

证明 不妨设 A 包含有至少无穷多个点，记 $g_z(\lambda) = \varphi(\lambda, z)$，$z \in A$，$g_z$ 是 Δ 上解析函数，考虑函数族 $\mathscr{G} = \{g_z(\lambda) \mid z \in A\}$．取 z_1, z_2, z_3 为 A 中三个不同的点，记 $A' = A \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$，令

$$h_z(\lambda) = \frac{g_z(\lambda) - g_{z_1}(\lambda)}{g_z(\lambda) - g_{z_2}(\lambda)} \cdot \frac{g_{z_3}(\lambda) - g_{z_2}(\lambda)}{g_{z_3}(\lambda) - g_{z_1}(\lambda)}, \ z \in A',$$

则由于对每个 $\lambda \in \Delta$，φ_λ 是单射，故当 $z, \zeta \in A$，$z \neq \zeta$ 时，$\varphi_\lambda(z) \neq$

$\varphi_\lambda(\zeta)$，于是对任意 $z\in A'$，$g_z(\lambda)\neq g_{z_i}(\lambda)$，$i=1,2,3$，即 $h_z(\lambda)$不取 $0,1,\infty$，由 Montel 定理，$\{h_z(\lambda)\}_{z\in A'}$是正规族，因而 $\mathscr{G}$ 也是正规族，即 $\mathscr{G}$ 是 Δ 上解析函数空间中的一个相对列紧子集. 令$\overline{\mathscr{G}}$是 $\mathscr{G}$ 的闭包，则$\overline{\mathscr{G}}$是紧集，而且每个 $g\in\overline{\mathscr{G}}$ 是 Δ 上解析函数. 下面证明，如果 g_1，$g_2\in\overline{\mathscr{G}}$ 但 $g_1\neq g_2$，则对任意 $\lambda\in\Delta$，$g_1(\lambda)\neq g_2(\lambda)$，如若不然，则存在点列 z_i，$\zeta_i\in A$，$g_{z_i}\to g_1$，$g_{\zeta_i}\to g_2(i\to\infty)$，$g_1-g_2$ 在 Δ 内有零点且不恒为零，故由 Hurwitz 定理(或 Rouché 定理)，当 i 充分大时，$g_{z_i}-g_{\zeta_i}$ 在 Δ 内有零点，即存在 $\lambda_i\in\Delta$，$g_{z_i}(\lambda_i)=g_{\zeta_i}(\lambda_i)$，但由于 φ_λ 是单射，$z_i=\zeta_i$ 因此 $g_1=g_2$，这就得出矛盾.

这样，每个 $g\in\overline{\mathscr{G}}$与 $g(0)$一一对应. 又存在 g_{z_i}，$z_i\in A$，$g_{z_i}\mapsto g$，特别地，$z_i=g_{z_i}(0)\mapsto g(0)\in\overline{A}$. 记 $z=g(0)$，因 g 由 $g(0)=z$ 唯一确定，我们可以将 g 记为 g_z. 另一方面，$\overline{\mathscr{G}}$是紧集，故 $\{g(0)\mid g\in\overline{\mathscr{G}}\}$ 是$\hat{\mathscr{C}}$中紧集，但 $\{g(0)\mid g\in\overline{\mathscr{G}}\}\supset A$，因此 $\overline{A}=\{g(0)\mid g\in\overline{\mathscr{G}}\}$，于是 $\overline{\mathscr{G}}=\{g_z\mid z\in\overline{A}\}$.

记 $\varphi(\lambda,z)=g_z(\lambda)$，则 $\varphi:\Delta\times\overline{A}\mapsto\hat{\mathscr{C}}$是 $\overline{A}$ 上的全纯运动.

下面证明每个 $\varphi_\lambda:\overline{A}\mapsto\hat{\mathscr{C}}$，$\varphi_\lambda(z)=\varphi(\lambda,z)$ 是拟共形的. 我们要证明 φ_λ 满足 Person 性质：即存在常数 $c(\lambda)>1$，使对任意 $z_0\in\overline{A}$，z_1，$z_2\in\overline{A}$ 满足 $|z_1-z_0|=|z_2-z_0|>0$，当 $z_1\neq z_2$ 时，有

$$\frac{1}{c(\lambda)}\leqslant\left|\frac{\varphi_\lambda(z_1)-\varphi_\lambda(z_0)}{\varphi_\lambda(z_2)-\varphi_\lambda(z_0)}\right|\leqslant c(\lambda).\qquad(5.1)$$

记 $h(\lambda)=\varphi_\lambda(z_1)-\varphi_\lambda(z_0)/\varphi_\lambda(z_2)-\varphi_\lambda(z_0)$，注意到 z_0，z_1，z_2 互不相同，由于 φ_λ 是单射，则$h(\lambda)$不取 $0,1,\infty$，因此，h 是 Δ 到三穿孔复球面 $\Sigma_3=\hat{\mathscr{C}}\backslash\{0,1,\infty\}$ 的解析映射，由 Schwartz 引理，h 为减小双曲度量，即 $d_{\Sigma_3}(h(\lambda),h(0))\leqslant d_\Delta(\lambda,0)$，这里 d_{Σ_3}是 Σ_3 上的双曲距离，d_Δ 是 Δ 上的双曲距离. 考虑紧集 $\Delta_r=\{|\lambda|\leqslant r<1\}$. 由于双曲度量在紧集上与球面度量等价，故存在常数 $c_1(r)$，$d_\Delta(\lambda,0)\leqslant c_1(r)|\lambda|$. 而由引理 1.5，在 Σ_3 的三个穿孔点的邻域内，球面度量小于双曲度量；在其他地

方，球面度量与双曲度量等价，故存在常数 c_2，使 $|h(\lambda)-h(0)|\leqslant c_2 d_{\Sigma_3}(h(\lambda),\ h(0))$. 又 $|h(0)|=1$，令 $c(\lambda)=c_1\cdot c_2|\lambda|+1$，则有 $|h(\lambda)|\leqslant c(\lambda)$. 交换 z_1 与 z_2 的位置，我们得到(5.1)式的另一半不等式，从而定理得证. 证毕.

推论 5.1 如果 $\varphi_\lambda:\hat{\mathscr{C}}\mapsto\hat{\mathscr{C}}(\lambda\in\Delta)$ 是全纯运动，则每个 φ_λ 是拟共形映射.

注 推论的逆也成立，即如果 $\varphi:\hat{\mathscr{C}}\mapsto\hat{\mathscr{C}}$ 是拟共形映射，则 φ 必属于某个 $\hat{\mathscr{C}}$ 上的全纯运动. 事实上，对 φ 规范化，如果 φ 的复特征为 μ，记 $\mu_\lambda=\lambda\cdot\mu,\lambda\in\overline{\Delta}$，则由可测 Riemann 映射定理，存在规范化拟共形映射 φ_λ 以 μ_λ 为复特征. 由 μ_λ 解析依赖于 λ 得到 φ_λ 也解析依赖于 λ，且 $\varphi_0=id$，因而 φ_λ 是一个全纯运动，而 $\varphi=\varphi_1$.

λ-引理是一个非常重要的引理，它不仅在复动力系统的研究中有用，在其他领域如 Klein 群理论的研究中也有重要应用. 有时用 λ-引理还不够，需要下面推广的 λ-引理.

定理 5.4′(推广的 λ-引理) 任一集合 $A\subset\hat{\mathscr{C}}$ 上的全纯运动可以扩充为 $\hat{\mathscr{C}}$ 上的全纯运动.

定理的证明较复杂，可参阅文献[ST, BR, SI].

§5.3 有理函数的 J-稳定性

在 $\mathrm{Rat}_d\times\hat{\mathscr{C}}$ 上考虑代数方程：

$$(R_w^n)(z)=z \tag{5.2}$$

及乘子函数 $\lambda_n(w_1,\ z)=(R_w^n)'(z)$.

设 $(w_0,\ z_0)$ 是方程(5.2)的一个解，如果 $\lambda_n(w_0,\ z_0)\neq 1$，则由隐函数定理，存在 w_0 的邻域 W 及其上的单值解析函数 $z=z(w)$，使得 $z_0=z(w_0)$，$(R_w^n)'(z(w))\equiv z(w)$，$w\in W$. 但当 $\lambda_n(w_0,\ z_0)=1$ 时，方程(5.2)一般没有单值解，考虑 $\mathrm{Rat}_d\times\hat{\mathscr{C}}$ 中解析子簇：

$$M_n = \{(w, z) \in \mathrm{Rat}_d \times \hat{\mathscr{C}} \mid (R_w^n)(z) = z\},$$

对于 $(w_0, z_0) \in M_n$，z_0 是 R_{w_0}的一个周期点，周期为 n 或为 n 的一个因子，而 $\lambda_n(w_0, z_0)$是周期点 z_0 的乘子或其幂，$\lambda_n(w_1, z)$是全纯的，我们将其限制为 M_n 上的全纯函数. 记 $P_n: M_n \mapsto \mathrm{Rat}_d$，$P_n(w, z) = w$ 为 M_n 到 Rat_d 上的投影，如果 $\lambda_n(w_0, z_0) \neq 1$，则由上面讨论，$P_n$ 在包含 (w_0, z_0)的 M_n 内的某个邻域上是单射.

如果对包含(w_0, z_0)的 M_n 内的任何邻域$\widetilde{W}_n$，P_n 限制在$\widetilde{W}_n$上不是单射，则称$(w_0, z_0) \in M_n$ 是一个(代数)奇点，记 $\Lambda_n \subset \mathrm{Rat}_d$ 是 M_n 中奇点集在 Rat_d 中的投影.

引理 5.1

1) λ_n 在 M_n 的每一连通分支上不恒为常数 c，使得 $|c| = 1$；

2) $(w_0, z_0) \in M_n$ 是奇点的充要条件是 $\lambda_n(w_0, z_0) = 1$；

3) $\mathrm{Rat}_d \backslash \Lambda_n$ 在 Rat_d 中是稠密的开集.

证明 1) 由于$\hat{\mathscr{C}}$是紧集，方程(5.2)关于 z 是代数方程，M_n 的每个分支在 Rat_d 上的投影是满射. 如果 λ_n 在 M_n 的某个分支上恒为 c，$|c| = 1$，则意味着对每个 $w \in \mathrm{Rat}_d$，R_w 有一个中性周期点，但 $R(z) = z^d \in \mathrm{Rat}_d$ 只有非中性周期点，引出矛盾.

2) 只要证明如果 $\lambda_n(w_0, z_0) = 1$，则(w_0, z_0)一定是奇点. 如若不然，则存在 w_0 的邻域 W_0 和 z_0 的邻域 U_0，使 $(W_0 \times U_0) \cap M_n$ 是(w_0, z_0) 在 M_n 内的邻域，而 P_n 限制在其上是单射，这样，对每个 $w \in W_0$，存在唯一的函数 $z = z(w) \in U_0$，使得 $(w, z(w)) \in M_n$，即 $z(w)$是 $R_w^n(z) - z$ 在 U_0 内的唯一零点，但由 Rouché 定理，当 W_0 充分小时，$z(w)$与 z_0 应有相同的重数，因此，$\lambda_n(w, z(w)) = 1$，即 λ_n 在 $(W_0 \times U_0) \cap M_n$ 上恒为 1. 由唯一性定理，λ_n 在 M_n 的包含(w_0, z_0)的分支上恒为 1. 与 1)矛盾.

3) Λ_n 为闭集是显然的，现在要证明 $\mathrm{Rat}_d \backslash \Lambda_n$ 是稠密的，这利用 λ_n 在 M_n 上不恒为 1 也是显然的. 我们还可直接证明如下：如若不然，则存在 $w_0 \in \Lambda_n$ 及其邻域 W_0，使 $W_0 \subset \Lambda_n$. 设 $P_{w_0}^n(z) = z$ 有 $m \leqslant d^n$ 个解

$z_1, z_2, \cdots, z_m$,取 W_0 充分小,$(W_0 \times \hat{\mathscr{C}}) \cap M_n$ 有 m 个分支$\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2, \cdots, \widetilde{W}_m$, $z_j \in \widetilde{W}_j$. 由于 $w_0 \in \Lambda_n$, 因此存在某个分支,设为$\widetilde{W}_j$, $P_n: \widetilde{W}_j \mapsto W_0$ 不是单射,故存在 $w_1 \in W_0$, 使 $P^n_{w_1}(z) = z$ 至少有两个解 z'_j, z''_j, 使 $(w_1, z'_j), (w_1, z''_j) \in \widetilde{W}_j$, 这样方程 $R^n_{w_1}(z) = z$ 总共至少有 $m + 1$ 个解. 取 w_1 的充分小邻域 $W_1 \subset W_0$, 则由 $w_1 \in \Lambda_n$, 对 w_1 与 W_1 可重复与上述同样的过程,则存在 $w_2 \in W_1$, 使 $R^n_{w_2}(z) = z$ 至少有 $m + 2$ 个解,且可取到 w_2 的邻域 $W_2 \subset W_1$, 这个过程可以一直继续下去,每次使得方程(5.2)增加至少一个解,这与方程(5.2)只有有限多个解矛盾. 从而定理得证.

证毕.

现记 $\lambda = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n}$, $H = \mathrm{Rat}_d \backslash \Lambda$. 在下面,我们称非中性周期点为双曲周期点,称中性周期点为非双曲周期点,而称有理中性周期点为抛物周期点.

定理 5.5

1) $w_0 \in H$ 的充要条件是存在 w_0 的邻域 W_0,使得对任意 $w \in W_0$, R_w 仅有双曲周期点.

2) H 是 Rat_d 中的一个稠密开集.

证明 1) 由定义,H 是开集.

必要性:由于 H 是开集,因此只要证明对任意 $w_0 \in H$, R_{w_0} 仅有双曲周期点,如若不然,则 R_{w_0} 有一非双曲周期点 z_0, 使得 $(w_0, z_0) \in M_n$, 且 $|\lambda_n(w_0, z_0)| = 1$. 但由于在 M_n 的包含(w_0, z_0)的分支上$|\lambda_n|$不恒为 1,且 λ_n 是全纯的,故对(w_0, z_0)的任意充分小的邻域$\widetilde{W}_0 \subset M_n$, 存在 $(w, z) \in \widetilde{W}_0$ 充分接近于(w_0, z_0),使得 $\lambda_n(w, z) = e^{2\pi i\theta}$, $\theta = \dfrac{p}{q}$ 是有理数. 但 $(w, z) \in M_{n_q}$, $\lambda_{n_q}(w, z) = \lambda_n(w, z)^q = 1$, 得到 $\omega \in \Lambda_{n_q}$, 因此 $w_0 \in \Lambda$, 矛盾. 从而必要性得证.

充分性:用反证法. 如果 $w_0 \in \Lambda$, 则对任意 w_0 的邻域 W_0,存在 $w \in W_0$, 使 $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ 即 w 属于某个 Λ_n,于是存在(5.2)式的解

$z(w, z) \in M_n$, $\lambda_n(w, z) = 1$，即 z 是 R_w 的抛物周期点，得到矛盾，从而充分性得证.

2）只要证明稠密性，即要证明对任意 $w_0 \in \mathrm{Rat}_d$ 及 w_0 的任意邻域 W_0，W_0 包含 H 中的点. 如果 $w_0 \in H$，则结论已成立，不妨设 $w_0 \in \Lambda$，这样，存在 $w_1 \in W_0$ 接近 w_0，使得 R_{w_1} 至少有一个中性周期点. 下面考虑吸引和超吸引周期轨道的个数，为叙述简单，我们将吸引和超吸引周期点合称为吸引周期点，由引理 2.9，对每个 $w \in \mathrm{Rat}_d$，R_w 至多只有 $2(d-1)$ 个吸引周期轨道. 现在设 R_{w_1} 有 $m = m(w_1) \leqslant 2(d-1)$ 个吸引周期轨道. 由于吸引周期点个数有限，由隐函数定理，存在 w_1 的公共的邻域 $W_1 \subset W_0$，如果 a 是 R_{w_1} 的一个吸引周期点，那么存在 W_1 上唯一的全纯函数 $a(w)$ 使得 $a(w)$ 是 R_w 的吸引周期点，且 $a(w_1) = a$. 如果 $\alpha = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ 是 R_{w_1} 的一个吸引周期轨道，那么由对应全纯函数 $a_j(w)$ 的唯一性，$\alpha(w) = \{a_1(w), a_2(w), \cdots, a_p(w)\}$ 是 R_w 的吸引周期轨道，因此，对 $w \in W_0$，R_w 至少有 m 个吸引周期轨道. 现在 R_{w_1} 至少有一个中性周期点 z_1，设周期为 n，则 $(w_1, z_1) \in M_n$，记 $\widetilde{W}_1$ 为 $(W_1 \times \hat{\mathscr{C}}) \cap M_n$ 包含 (w_1, z_1) 的分支，由 $|\lambda_n|$ 在 $\widetilde{W}_1$ 上不恒为 1，存在 $(w_2, z_2) \in \widetilde{W}_1$ 充分接近 (w_1, z_1)，这里 $w_2 \in W_1$，使得 $|\lambda_n(w_2, z_2)| < 1$，即 z_2 是 R_{w_2} 的吸引周期点，这样，R_{w_2} 至少有 $m+1$ 个吸引周期轨道，且再由隐函数定理，存在 w_2 的邻域 $W_2 \subset W_1$，及 W_2 上全纯函数 $z_2(w)$，使得 $z_2(w)$ 是 R_w 的吸引周期点，故对每个 $w \in W_2$，R_w 至少有 $m+1$ 个吸引周期轨道. 如果对每个 $w \in W_2$，R_w 不再有中性周期轨道，则由 1）所证，$w_2 \in H$，结论已成立，否则存在 $w \in W_2$，使 R_w 有一个中性周期轨道，因此，可进行与上面同样的过程. 这样，如果结论不成立，则上面的过程可无限重复地进行. 但由于吸引周期轨道个数不超过 $2(d-1)$，而过程每进行一次，R_w 的吸引周期轨道个数至少增加 1，因此，过程只能在进行有限次后结束，这就证明了结论. 证毕.

下面的定理给出了有理函数 J-稳定性的刻画.

定理 5.6 $R_w \in \mathrm{Rat}_d$ 是 J-稳定的充要条件是 $w \in H$，而且如果 $w_0 \in H$，则存在 w_0 的邻域 $W_0 \subset H$，及 J-共轭映射 φ：$W_0 \times J(R_{w_0})$

$\mapsto \hat{\mathscr{C}}$，$\varphi_w(z)=\varphi(w,z)$，使得 φ 是 $J(R_{w_0})$ 上的全纯运动，因而 φ_w：$J(R_{w_0})\mapsto J(R_w)$ 是拟共形的.

证明 设 $w_0\in H$，我们要证明 R_{w_0} 是 J-稳定的. 取 $W_0\subset H$ 是 w_0 的单连通邻域，那么对任意 n，在 $(W_0\times\hat{\mathscr{C}})\cap M_n$ 的每个分支上，投影 P_n 是单射. 考虑 R_w 的周期点（对 $w\in W_0$，它们都是双曲的），设 a 是 R_{w_0} 的周期点，周期为 n，则 $(w_0,a)\in M_n$. 由于 P_n 在 $(W_0\times\hat{\mathscr{C}})\cap M_n$ 的包含 (w_0,a) 的分支上是单射，故这个分支决定了 W_0 上的唯一的单值函数 $a(w)$，使得 $a(w_0)=a$，且 $(w,a(w))\in M_n$，即 $R_w^n(a(w))=a(w)$. 由于 R_w 的周期点是双曲的，由隐函数定理知，$a(w)$ 是全纯的. 我们说 $a(w)$ 与 a 有相同的周期，即若 $\alpha=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 是 R_{w_0} 的一个周期轨道，则由 M_n 决定的 $\alpha(w)=(a_0(w),a_1(w),\cdots,a_{n-1}(w))$ 是 R_w 的一个周期轨道，首先，若 a_1，a' 是 R_{w_0} 的两个不同的周期点，则对任意 $w\in W_0$，$a(w)\neq a'(w)$. 事实上，如果设 $(w_0,a)\in M_n$，$(w_0,a')\in M_m$，那么有 $(w,a(w))\in M_n$，$(w,a'(w))\in M_m$，而它们都属于 M_{nm}；如果存在 $w_1\in W_0$，$a(w_1)=a'(w_1)$，那么由 P_{nm} 在 $(w_1,a(w_1))$ 的位于 M_{nm} 内的邻域内是单射，必有 $a(w)\equiv a'(w)$，此与 $a\neq a'$ 矛盾. 这样，$\alpha(w)$ 中任意两个周期点 $a_i(w)\neq a_j(w)(i\neq j)$. 其次，$R_w^k(a_0(w))$ 与 $a_k(w)$ 都满足方程 $R_w^n(z)=z$，而 $R_{w_0}^k(a_0(w_0))=a_k(w_0)=a_k$，仍由 P_n 是单射即得 $R_w^k(a_0(w))\equiv a_k(w)$，$\alpha(w)$ 构成 R_w 的一个周期轨道.

现将 R_w 的周期点集记为 $P(R_w)$，我们来定义函数 φ：$W_0\times P(R_{w_0})\mapsto\hat{\mathscr{C}}$. 对 R_{w_0} 的每个周期点 $a\in P(R_{w_0})$，定义 $\varphi(w,a)=\varphi_w(a)=a(w)$，由前面讨论，$\varphi$ 是 $P(R_{w_0})$ 上的全纯运动，φ_w：$P(R_{w_0})\mapsto P(R_w)$，且 $R_w\circ\varphi_w(a)=\varphi_w\circ R_w(a)$，$a\in P(R_{w_0})$. 由 λ-引理，φ 可以扩充为 $\overline{P(R_{w_0})}$ 上的全纯运动，φ_w：$\overline{P(R_{w_0})}\mapsto\overline{P(R_w)}$ 是拟共形映射，由连续性可知，φ_w 在 $\overline{P(R_{w_0})}$ 上仍满足 $R_w\circ\varphi_w(z)=\varphi_w\circ R_w(z)$，$z\in\overline{P(R_w)}$，但 $\overline{P(R_w)}$ 是 $J(R_w)$ 并上有限多个孤立点（吸引或超吸引周期点），因而 φ_w：$J(R_{w_0})\mapsto J(R_w)$. 注意到 w 固定时，w 与 w_0 的地位相

同,故 φ_w 是 $J(R_{w_0})$ 到 $J(R_w)$ 上的同胚,因此,φ_w 是 J-共轭映射,且是 $J(R_{w_0})$ 上全纯运动. 这就证明了定理的充分性及所要求的性质.

下面证明必要性. 设 R_{w_0} 是 J-稳定的,由定义,在 w_0 的某个邻域内,$J(R_w)$ 连续依赖于参数 w,如果 $w_0 \in \Lambda$, 则对任意 w_0 的邻域 W_0,存在 $w_1 \in W_1$, 使得 $w_1 \in \Lambda_n$, 即 R_{w_1} 有一个抛物周期点 z_1,$(w_1, z_1) \in M_n$,且 $\lambda_n(w_1, z_1) = 1$. 由 $|\lambda_n| \neq 1$, 存在 $(w_2, z_2) \in M_n$ 任意充分接近于 (w_1, z_1),使得 $\lambda_n(w_2, z_2) = e^{2\pi i\theta}$, θ 满足 Siegel 条件,于是 $z_2 \in \hat{\mathscr{C}} \backslash J(R_{w_2})$ 包含在 Siegel 盘内. 但进一步由 $|\lambda_n| \neq 1$, 存在 $(w_3, z_3) \in M_n$ 充分接近于 (w_2, z_2),使得 $|\lambda_n(w_3, z_3)| > 1$, 于是 $z_3 \in J(R_{w_3})$, 因此,$J(R_w)$ 在 W_0 内不连续依赖于 w,这是矛盾的,故 $w_0 \in H$. 证毕.

上述定理结合定理 5.5 得,J-稳定的有理函数全体在 Rat_d 中是一个稠密开子集,称 H 为 J-稳定集.

从证明中可以看出,R_{w_0} 是 J-稳定的充要条件是在 w_0 的某个邻域内,$J(R_w)$ 连续依赖于参数 w.

定理 5.7 设 $R_{w_0} \in \mathrm{Rat}_d$ 是双曲有理函数,则 R_{w_0} 是 J-稳定的.

证明 我们只要证明,若 R_{w_0} 是双曲的,则存在 w_0 的邻域 W_0,使得对任意 $w \in W_0$, R_w 是双曲的,即双曲有理函数在 Rat_d 中是开的. 由于双曲有理函数只有双曲周期点,因此由定理 5.5 之 1)及定理 5.6, R_{w_0} 是 J-稳定的.

回忆 R_w 是双曲的,当且仅当 R_w 的每个临界轨道收敛于 R_w 的吸引或超吸引周期轨道.

现设 R_{w_0} 是双曲的,我们要证明:如果 $\alpha = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 是 R_{w_0} 的吸引(或超吸引)周期轨道,c_0 是 R_{w_0} 的临界点,且如果 c_0 的轨道收敛于 α,则对 c_0 的充分小邻域 U,存在 w_0 的充分小邻域 W_0,使得对任意 $w \in W_0$, $\{R_w^k\}$ 在 U 内局部一致收敛于 R_w 的一个吸引(或超吸引)周期轨道. 为方便计,不妨设 $\alpha = a_0$ 是一个吸引不动点,那么,存在 a_0 的不变邻域 V,使得 $R_{w_0}(\overline{V}) \subset V$, 并且,如果 W_0 是 w_0 的充分小邻域,则当 $w \in W_0$ 时,也有 $R_w(\overline{V}) \subset V$, 这样,由 Schwartz 引理,$\{R_w^k\}$ 在 V 内局部一致收敛于 R_w 的吸引不动点 $a_0(w)$. 又对于 c_0,存在 n 使得

$R^n_{w_0}(c_0) \in V$，如果 U 是 c_0 的充分小邻域，则 $R^n_{w_0}(\overline{U}) \subset V$. 同样，当 W_0 充分小时，对 $w \in W_0$，$R^n_w(\overline{U}) \subset V$，因此 $\{R^n_w\}$ 在 U 内一致收敛于 R_w 的不动点 $a_0(w)$.

但是，如果 c_0 是 R_{w_0} 的 k 重临界点 $(k \geq 1)$，即为方程 $R'_{w_0}(z) = 0$ 的 k 重根，则由 Rouché 定理，当 W_0 充分小时，对任意 $w \in W_0$，R_w 在 U 内有 k 个临界点(计重数)，因此，这 k 个临界点的轨道收敛于 R_w 的吸引不动点 $a_0(w)$. 由于临界点个数和吸引(超吸引)周期轨道的个数是有限的，我们可以找到公共的邻域 W_0，这样，如果 R_{w_0} 的 $2d-2$ 个临界点轨道均收敛于 R_{w_0} 的吸引(超吸引)周期轨道，则对 $w \in W_0$，R_w 的 $2d-2$ 个临界点轨道也收敛于 R_w 的吸引(超吸引)周期轨道，即 R_w 是双曲的. 证毕.

如果定理的逆也成立，则由 J-稳定有理函数在 Rat_d 中是稠密的，即可得双曲性猜想成立，因此有下面与双曲性猜想等价的猜想.

猜想 5.2 如果 R_w 是 J-稳定的，那么 R_w 是双曲的.

§5.4 临界轨道关系与局部拟共形共轭

下面，我们将研究有理函数的结构稳定性，这时，临界轨道的状态将起到极为重要的作用. 事实上我们将看到，临界轨道的状态决定了有理函数的结构稳定性.

对每个 $w \in \mathrm{Rat}_d$，R_w 的临界点是下面代数方程的解：

$$R'_w(z) = 0. \qquad (5.3)$$

记 $\lambda(w, z) = \lambda_w(z) = R'_w(z)$，这是 $\mathrm{Rat}_d \times \hat{\mathscr{C}}$ 上的全纯函数，考虑解析子簇：

$$C = \{(w, c) \in \mathrm{Rat}_d \times \hat{\mathscr{C}} \mid \lambda(w, c) = 0\},$$

及投影 $P: C \mapsto \mathrm{Rat}_d$，$P(w, c) = w$. 与 M_n 类似，称 $(w, c) \in C$ 是一个奇点，如果对 (w, c) 在 C 内的任何邻域 $\widetilde{W}$，P 限制在 $\widetilde{W}$ 上不是单射. 记 $S_0 \subset \mathrm{Rat}_d$ 是 C 中奇点集在 Rat_d 中的投影，与引理 5.1 类似，我

们有下面的引理.

引理 5.2

1) (w, c)是 C 中奇点的充要条件是 $\lambda'_w(c) = 0$.

2) $\mathrm{Rat}_d \backslash S_0$ 是 Rat_d 中的稠密开集.

证明 我们只要证明 $\lambda'_w(c)$在 C 的每个连通分支上不恒为 0,如若不然,注意到 $\lambda'_w(c) = 0$ 等价于 c 是 R_w 的重临界点,则得对任意 $w \in \mathrm{Rat}_d$, R_w 有重临界点,但容易构造 $R \in \mathrm{Rat}_d$, 使得 R 的所有临界点都是单临界点,例如, $R_\varepsilon(z) = z^2 + \frac{\varepsilon}{z^{d-2}}$, 取适当的 ε 即可. 这样,利用$\lambda'_w(c)$不恒为 0,引理 5.2 的证明与引理 5.1 的证明完全相同.

现在,如果 $w_0 \in \mathrm{Rat}_d \backslash S_0$, 则 R_{w_0}的临界点都是单临界点,故一定共有 $2d-2$ 个不同的临界点,记为 $c_1, c_2, \cdots, c_{2d-2}$. 由于 P 在(w_0, c_i)的在 C 中的邻域上是单射,对 w_0 的邻域 $W_0 \subset \mathrm{Rat}_d \backslash S_0$, $(W_0 \times \hat{\mathscr{C}}) \cap C$ 的 $2d-2$ 个分支确定了 $2d-2$ 个 W_0 上的函数 $c_1(w), c_2(w), \cdots, c_{2d-2}(w)$,使得它们正好是 R_w 的所有 $2d-2$ 个(单)临界点,且 $c_j(w_0) = c_j$, $j = 1, 2, \cdots, 2d-2$, 由隐函数定理,$c_j(w)$是全纯函数.

为定义临界轨道关系,我们回顾有理函数 R 的 Fatou 集的周期分支的结构. 由 Sullivan 分类定理,周期 Fatou 分支共有五类:吸引的、抛物型的、超吸引的、Siegel 盘与 Herman 环. 前面两类在大轨道等价关系下有基本区域,而后面三类则有层状结构,对超吸引周期分支,每一叶片是下述等价关系的等价类的闭包:x 与 y 是等价的当且仅当存在 n,使得 $R^n(x) = R^n(y)$. 对 Siegel 盘与 Herman 环,每一叶片是一条 R-不变解析曲线,即为某一点的正向轨道的闭包. 在局部共形共轭映射下,叶片对应于圆心为原点的同心圆(见图 3.2).

定义等价关系 $\sim$:$x \sim y$ 当且仅当 $x = y$ 或者 x, y 属于超吸引周期分支,或 Siegel 盘,或 Herman 环的同一叶片内.

定义 5.6 设 $R \in \mathrm{Rat}_d$, $c_1, c_2, \cdots, c_{2d-2}$是 R 的所有临界点,如果存在 m, n, i, j 满足 $m, n \geqslant 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2d-2$ 且 $(m, i) \neq (n, j)$,使得

$$R^m(c_i) \sim R^n(c_j), \tag{5.4}$$

则称 R 具有临界轨道关系，也称(5.4)式是一个临界轨道关系.

注 当 $i=j, m\neq n$ 时，(5.4)式表明或者临界点 c_i 是(最终)周期的，或者 c_i 的轨道最终落在 Siegel 盘或 Herman 环内；当 $m=n=0$，$i\neq j$ 时，或者 $c_i\neq c_j$，但 c_i，c_j 的轨道属于同一叶片，或者 $c_i=c_j$，后者意指 c_i 是 R 的重临界点，即 $R\in S_0$；当 $m=n$ 且 $mn\neq 0$ 时，表示两个临界点的轨道最终重合或落于同一叶片.

现在考虑 $R_{w_0}\in \mathrm{Rat}_d\backslash S_0$，这时在 w_0 的邻域内，R_w的临界点是 $2d-2$ 个单值全纯函数 $c_1(w)$，$c_2(w)$，…，$c_{2d-2}(w)$. 定义集合 $\Omega\subset \mathrm{Rat}_d\backslash S_0$ 如下：$w_0\in\Omega$ 当且仅当存在 w_0 的邻域 W_0，使得 R_{w_0}具有临界轨道关系的充要条件是对一切 $w\in W_0$，R_w 具有相同的临界轨道关系，也即对任何 $(m, i)\neq(m, j)$，

$$R_w^m(c_i(w))\sim R_w^n(c_j(w)) \tag{5.5}$$

对一切 $w\in W_0$ 同时成立或同时不成立.

下面我们将说明 $\Omega\subset H$，先引进两个引理，其中引理 5.3 是隐函数定理的直接推论.

引理 5.3 设 $W_0\subset \mathrm{Rat}_d$ 是一个单连通区域，$\varphi: W_0\mapsto\hat{\mathscr{C}}$是全纯函数满足下述条件：对每个 $w\in W_0$，$\varphi(w)$ 不属于 R_w 的任何临界值的正向轨道，那么对任意 $n\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant d^n$，存在全纯函数 $\varphi_n, i: W_0\mapsto\hat{\mathscr{C}}$ 满足 $R_w^n(\varphi_{n,i}^{(w)})=\varphi(w)$ 且 $\varphi_{n,i}(w)\neq\varphi_{n,j}(w)$，$(w\in W_0, i\neq j)$.

证明 由隐函数定理，方程 $R_w^n(z)=\varphi(w)$ 有 d^n 个局部解，再由隐函数定理，这 d^n 个解可全纯开拓到 W_0 上. 证毕.

引理 5.4 设 W_0 与 φ 满足引理 5.3 的条件，又假设或者对任意 $w\in W_0$，$\varphi(w)$ 不是 R_w 的周期点，或者存在某个 $N\geqslant 0$，使得对任意 $w\in W_0$，$R_w^N(\varphi(w))=\varphi(w)$，那么 $W_0\subset H$.

证明 我们将仅对 $\varphi(w)$不是 R_w 的周期点情形加以证明. 因为对于$\varphi(w)$是周期点的情形，由引理 5.3，可取到$\varphi(w)$的一个 R_w 逆像 $\varphi_{1,i}(w)$，使得对任意 $w\in W_0$，$\varphi_{1,i}(w)$ 是非周期点，这样，用$\varphi_{1,i}(w)$代替 $\varphi(w)$即可.

现在，任取某个 $w_0\in W_0$，令 $L=\bigcup_{n\geqslant 0}R_{w_0}^{-n}(\varphi(w_0))=\bigcup_{n\geqslant 0}\bigcup_{1\leqslant i\leqslant d^n}\varphi_{n,i}(w_0)$. 我们说，如果 $(m,i)\neq(n,j)$，则 $\varphi_{m,i}(w_0)\neq\varphi_{n,j}(w_0)$. 事实上，若 $m=n$，则由引理 5.3 即得；若 $m\neq n$，则由 $\varphi(w_0)$ 是非周期点即得，于是我们可以定义映射 $h: W_0\times L\mapsto\hat{\mathscr{C}}$ 如下：如果 $z=\varphi_{n,i}(w_0)$，则 $h(w,z)=\varphi_{n,i}(w)$. 记 $h_w(z)=h(w,z)$，显然 h_w 是 w 的全纯函数，$h_{w_0}=id$. 另一方面，若 $\varphi_{m,i}(w_0)\neq\varphi_{n,j}(w_0)$，$(m,i)\neq(n,j)$，则由引理 5.3($m=n$ 情形) 及 $\varphi(w)$ 是非周期点 ($m\neq n$ 情形) 即得 $\varphi_{m,i}(w)\neq\varphi_{n,j}(w)$，$w\in W_0$，因此 h_w 还是单射，故 h_w 是 L 上的一个全纯运动. 由 λ-引理，h_w 可以扩充为 $h_w:\overline{L}\mapsto\overline{h_w(L)}$ 的全纯运动，由定义，在 L 上，

$$R_w\circ h_w(z)=h_w\circ R_{w_0}(z).$$

由连续性，上式在 $\overline{L}$ 上也成立. 再由定理 2.4，$\overline{L}\supset J(R_{w_0})$. 如果我们能证明 $h_w(J(R_{w_0}))=J(R_w)$，则 h_w 是 J- 共轭映射，R_{w_0} 是 J- 稳定的，即 $w_0\in H$.

若 $z\in J(R_{w_0})$，则存在一列不同于 z 的 R_{w_0} 的周期点列 $\{z_n\}$，使得 $z_n\to z(n\to\infty)$，这样，$h_w(z_n)$ 是 R_w 的周期点，不同于 $h_w(z)$ 且 $h_w(z_n)\to h_w(z)$，因此 $h_w(z)\in J(R_w)$，即 $h_w(J(R_{w_0}))\subset J(R_w)$. 但对固定的 w，w_0 与 w 的地位是相同的，交换 w_0 与 w 且用 h_w^{-1} 代替 h_w 则得 $h_w^{-1}(J(R_w))\subset J(R_{w_0})$，所以 $h_w(J(R_{w_0}))=J(R_w)$. 证毕.

引理 5.5 $\Omega\subset H$.

证明 首先我们注意到，如果 $R\in\mathrm{Rat}_d$ 是非双曲的，那么，存在 R 的临界点 c_0，它不属于 R 的任何临界值的正向轨道. 事实上，若这样的临界点不存在，则意味着 R 的每个临界点都是周期点，且是超吸引周期点，因而 R 是双曲的. 现在，设 $w_0\in\Omega$，如果 R_{w_0} 是双曲的，则由定理 5.7，$w_0\in H$. 下面设 R_{w_0} 是非双曲的，那么存在 R_{w_0} 的临界点 c_0，它不属于 R_{w_0} 的任何临界值的正向轨道. 由 Ω 的定义，存在 w_0 的邻域 W_0 及其上的全纯函数 $c_0(w)$，$w\in W_0$，使得 $c_0(w)$ 是 R_w 的临界点，且 $c_0(w_0)=c_0$. 由于在 Ω 内 R_w 保持临界轨道关系，故 c_0 不属于 R_{w_0} 的临界

值的正向轨道蕴含着 $c_0(w)$ 不属于 R_w 的临界值的正向轨道，c_0 是非周期点蕴含着 $c_0(w)$ 是非周期点，因此，$\varphi(w)=c_0(w)$ 满足引理 5.4 的条件，这就导出了 $W_0\subset H$. 证毕.

推论 5.2 如果 $w_0\in\Omega$，那么 R_{w_0} 没有中性周期点，因而 $F(R_{w_0})$ 没有抛物周期分支和 Siegel 盘.

§5.5 有理函数的结构稳定性

首先介绍带参数的局部共形共轭，它们与单个有理函数的局部共形共轭是完全类似的.

引理 5.6 设 $w_0\in \mathrm{Rat}_d$，a_0 是 R_{w_0} 的吸引周期点，周期为 p，$a(w)$ 是 w_0 的邻域 W_0 上的全纯函数，满足 $R_w^p(a(w))=a(w)$ 且 $a(w_0)=a_0$，那么，当 W_0 充分小时，存在 a_0 的邻域 V_0 以及全纯函数 $h: W_0\times V_0\mapsto\hat{\mathscr{C}}$，$h_w(z)=h(w, z)$，满足：

1）对一切 $w\in W_0$，$R_w^p(\overline{V_0})\subset V_0$；

2）对每个 $w\in W_0$，h_w 是单射，且 $h_w(a(w))=0$；

3）对一切 $w\in W_0, z\in V_0, h_w\circ R_w^p(z)=(R_w^p)'(a(w))\cdot h_w(z)$.

引理 5.7 设 $w_0\in \mathrm{Rat}_d, W_0$ 是 w_0 的邻域，$c_0(w)$ 是 R_w 的临界点 $(w\in W_0)$，满足 $R_w^p(c_0(w))=c_0(w)$，$c_0(w_0)=c_0$，那么，当 W_0 充分小时，存在 c_0 的邻域 V_0 及全纯函数 $h: W_0\times V_0\mapsto\hat{\mathscr{C}}$，$h_w(z)=h(w, z)$，满足：

1）对一切 $w\in W_0$，$R_w^p(\overline{V_0})\subset V_0$；

2）对每个 $w\in W_0$，h_w 是单射，且 $h_w(c_0(w))=0$；

3）对一切 $w\in W_0$，$z\in V_0, h_w\circ R_w^p(z)=h_w(z)^k$，这里 k 是 c_0 作为 $R_{w_0}^p$ 的超吸引不动点的重数.

引理 5.8 设 $w_0\in H$，A 是 R_{w_0} 的一个 Herman 环，满足 $R_{w_0}^p(A)=A$，又设 $U\subset A$ 是一个 $R_{w_0}^p$- 不变开环域，其边界由两条 $R_{w_0}^p$- 不变解析曲线围成，那么，存在 w_0 的邻域 W_0 及开圆环 $T\subset\mathscr{C}$，以及全纯函数 $h: W_0\times T\mapsto\mathscr{C}$，$h_w(z)=h(w, z)$，使得每个 h_w 是单射且满足对一切

$z \in T$,

$$h_w(e^{i\theta}z) = R_w^p \circ h_w(z).$$

这里,θ 是 $R_{w_0}^p | A$ 的旋转数,而 $h_0(T) = U$.

上述三个引理的证明类似于单个有理函数的情形,仅引理 5.8 的证明较复杂,读者可自己证明或参看文献[Mss]. 函数 h_w 对 w 的全纯依赖性是由于在证明中所用到的极限关于 w 是局部一致收敛的.

现在我们可以证明下述定理.

定理 5.8 Ω 是 Rat_d 中的一个稠密开集.

证明 由定义,Ω 是开集,只要证明稠其密性. 由于 $\Omega \subset \mathrm{Rat}_d \backslash S_0$ 及 S_0 在 Rat_d 中无处稠密,因此只要证明 Ω 在 $\mathrm{Rat}_d \backslash S_0$ 中稠密. 又 $\Omega \subset H$ 及 H 在 Rat_d 中稠密,故又只要证明 Ω 在 $H \backslash S_0$ 中稠密.

现对任意 $w_0 \in H \backslash S_0$ 及其单连通邻域 $W_0 \subset H \backslash S_0$,记 $S(W_0) = W_0 \backslash \Omega$,我们要证明 $S(W_0)$ 在 W_0 中无处稠密. 由于 $W_0 \subset H \backslash S_0$,因此每个 R_w 有 $2d-2$ 个临界点 $c_1(w)$, $c_2(w)$, $\cdots$, $c_{2d-2}(w)$. 对 w_0,不妨设 $c_1(w_0)$, $\cdots$, $c_k(w_0)$ 在 R_{w_0} 的 Fatou 集内,而 $c_{k+1}(w_0)$, $\cdots$, $c_{2d-2}(w_0)$ 在 R_{w_0} 的 Julia 集内. 由 J- 稳定性,则存在 J- 共轭映射 $\varphi_w : J(R_{w_0}) \mapsto J(R_w)$. 由于 Julia 集是完全不变的,因此如果 $c_j(w_0) \in J(R_{w_0})$,则 $|R_{w_0}|J(R_{w_0})$ 在 $c_j(w_0)$ 的邻域内不为单射,反之亦然. 由共轭关系,$R_w | J(R_w)$ 在 $\varphi_w(c_j(w_0))$ 的邻域内也不为单射,因此,$\varphi_w(c_j(w_0)) = c_j(w)$. 反之,若 $c_j(w) \in J(R_w)$,则 $\varphi_w^{-1}(c_j(w)) = c_j(w_0) \in J(R_{w_0})$,于是我们得 $c_{k+1}(w), \cdots, c_{2d-2}(w)$ 是所有 R_w 在 $J(R_w)$ 内的临界点 $(w \in W_0)$,且仍由 J- 共轭关系,如果 $R_{w_0}^m(c_i(w_0)) = R_{w_0}^n(c_j(w_0))$, $(m, i) \neq (n, j)$, $k < i \leqslant j < 2d-2$,则 $R_w^m(c_i(w)) = R_w^n(c_j(w))$ $(w \in W_0)$,因此,在 Julia 集内的临界点总是保持临界轨道关系的.

下面考虑Fatou集内的临界点 $c_1(w)$, $\cdots$, $c_k(w)$. 由于 $W_0 \subset H$,对 $w \in W_0$,$F(R_{w_0})$ 的周期分支只能是吸引和超吸引的或是 Herman 环,定义 $S(m, n, i, j) = \{w \in W_0 | R_w^m(c_i(w)) \sim R_w^n(c_j(w))\}$, m, $n \geqslant 0$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant k$, $(m, i) \neq (n, j)$,我们知道,$R_w^m(c_i(w)) \sim R_w^n(c_j(w))$ 表示:或者 $R_w^m(c_i(w)) = R_w^n(c_j(w))$,或者 $R_w^m(c_i(w))$ 与$R_w^n(c_j(w))$ 位于

超吸引分支或 Herman 环的同一叶片上. 由引理 5.7 和引理 5.8,存在全纯函数 h_w,使 $|h_w \circ R_w^m(c_i(w))| = |h_w \circ R_w^n(c_j(w))|$,故存在确定的 $\theta \in \mathscr{R}$, $h_w \circ R_w^m(c_i(w)) = e^{2\pi i\theta} h_w \circ R_w^n(c_j(w))$,因此,$S(m, n, i, j)$ 是 W_0 中的解析子簇. 如果 $S(m, n, i, j) \neq \varnothing$ 且 $\neq W_0$,则 $S(m, n, i, j)$ 在 W_0 中是无处稠密的闭集,而 $S(W_0)$ 为 $\bigcup \{S(m, n, i, j) | S(m, n, i, j) \neq \varnothing$ 且 $\neq W_0$, $(m, i) \neq (n, j)\}$ 的闭包. 但再由引理 5.6,引理 5.7 和引理 5.8,带参数的局部共形共轭保证:如果对固定的 $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $R_w^m(c_i(w)) \sim R_w^n(c_j(w))$,那么存在最小的 $m_0 = m_0(i, j)$, $n_0 = n_0(i, j)$,使得当 $R_w^m(c_i(w))$ 属于吸引或超吸引分支时,对一切 $s \geqslant 0$, $R_w^{m_0+s}(c_i(w)) \sim R_w^{n_0+s}(c_j(w))$,但对 $s, t \geqslant 0, s \neq t$,则 $R_w^{m_0+t}(c_i(w)) \nsim R_w^{n_0+s}(c_j/w)$. 当 $R_w^m(c_j(w))$ 属于 Herman 环时,则对一切 s, $t \geqslant 0$, $R_w^{m_0+t}(c_i(w)) \sim R_w^{n_0+s}(c_j(w))$,因此,我们可以找到 M_0, N_0,使得 $S(W_0) = \bigcup \{S(m, n, i, j) | S(m, n, i, j) \neq \varnothing$ 且 W_0, $(m, i) \neq (n, j)$, $m \leqslant M_0$, $n \leqslant N_0$, $1 \leqslant i, j \leqslant k\}$,这是有限个无处稠密闭集的并集,故 $S(W_0)$ 也是无处稠密的. 证毕.

下面讨论当 $w_0 \in \Omega$ 时 R_{w_0} 的结构稳定性,应用的主要工具仍是 λ-引理,当 R_{w_0} 有 Herman 环时,需要推广的 λ-引理,这里仅考虑较简单的情形:设 R_{w_0} 没有 Herman 环. 此时,R_{w_0} 只有吸引和超吸引周期 Fatou 分支,回忆结构稳定性的定义,R_{w_0} 是结构稳定的,如果存在 w_0 的邻域 $W_0 \subset \Omega$,使得对任意 $w \in W_0$,存在 $\hat{\mathscr{C}}$ 上拓扑共轭 $\varphi_w: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$, $\varphi_w \circ R_{w_0} = R_w \circ \varphi_w$,且 φ_w 连续依赖于 w. 我们的目的是构造拓扑共轭映射 φ_w,其构造思想是:先在 R_{w_0} 的吸引和超吸引周期点的邻域内构造局部共轭,然后将其扩充到整个 Fatou 集上,再由 λ-引理将其扩充到整个复球面 $\hat{\mathscr{C}}$ 上,因此,我们首先考虑在吸引和超吸引周期点的邻域内构造局部共轭.

自然我们可以利用周期点的局部模型(引理 5.6 和引理 5.7),但结构稳定还要求共轭映射 φ_w 将 R_{w_0} 的临界轨道映成 R_w 的临界轨道,故局部共轭映射也应满足此性质,而保持临界轨道关系使得我们能够做到这一点,我们分别对吸引和超吸引情形讨论之.

设 $w_0 \in W_0 \subset \Omega$, $a(w)$是 R_w 的一个吸引周期点 ($w \in W_0$), 记 $a(w_0) = a_0$, 为叙述简单计,不妨设$a(w)$为 R_w 的不动点,由引理 5.6, 则存在 a_0 的邻域 V_0, $R_w(\overline{V_0}) \subset V_0$, 以及共形共轭 $h_w: V_0 \mapsto \mathscr{C}$满足 $h_w(a(w)) = 0, h_w \circ R_w(z) = \lambda(w) \cdot h_w(z) (z \in V_0, w \in W_0)$, 这里 $\lambda(w) = R'_w(a(w))$. 又设 $a(w)$吸引 $l \leqslant k$ 个临界轨道,不妨设吸引 $c_1(w)$, $c_2(w)$, $\cdots$, $c_l(w)$(当 W_0 充分小时,l 与 w 无关),现在取 $r_0 > 0$ 充分小,使得 $V_w = h_w^{-1}(\Delta_{r_0}) \subset V_0$, 且其边界 ∂V_w 与每个临界轨道 $O^+(c_j(w))(1 \leqslant j \leqslant l)$ 不相交. 又记 $z_j(w)$是 $c_j(w)$的轨道首次进入 V_w 的点, 即若令 $n_0 = \min\{n | R_w^n(c_j(w)) \in V_w\}$, 则 $z_j(w) = R_w^{n_0}(c_j(w)), 1 \leqslant j \leqslant l$ (同样,当 W_0 充分小时,n_0 与 w 无关). 由于保持临界轨道关系,或者 $z_i(w) \equiv z_j(w) (w \in W_0)$,或者对任意 $w \in W_0, z_i(w) \neq z_j(w)$, $i \neq j$. 又由局部线性化模型,如果 $z_i(w) \neq z_j(w)$, $i \neq j$, 则对任意 $s, t \geqslant 0$, $R_w^s(z_i(w)) \neq R_w^t(z_j(w))$. 现在记 $\zeta_j(w) = h_w \circ z_j(w)$, $j = 1, 2, \cdots, l$, 则 $\zeta_j(w)$是 w 的全纯函数,且或者 $\zeta_i(w) \equiv \zeta_j(w)$, 或者 $\zeta_i(w) \neq \zeta_j(w), w \in W_0, i \neq j$.

引理 5.9 存在映射 $g: W_0 \times \Delta_{r_0} \mapsto \mathscr{C}, g_w(z) = g(w, z)$ 满足:

1) 对每个 $w \in W_0$, g_w 是 Δ_{r_0}到 Δ_{r_0}的同胚, $g_{w_0} = id$;

2) 对每个 $z \in \Delta_{r_0}$, $g(w, z)$是 w 的全纯函数;

3) $g_w(\lambda(w_0), z) = \lambda(w) \cdot g_w(z)$, $z \in \Delta_{r_0}, w \in W_0$;

4) $g_w \circ \zeta_j(w_0) = \zeta_j(w)$, $w \in W_0$, $1 \leqslant j \leqslant l$.

证明 记 $A_w = \Delta_{r_0} \setminus \overline{\Delta_{r_1}}$, 这里 $r_1 = r_i(w) = |\lambda(w)| r_0$, 由定义,每个 $\zeta_j(w) \in A_w$, 且 $\zeta_j(w) \notin \partial A_w$.

作坐标变换 $Z = \log z, 0 \leqslant \mathrm{Im} Z \leqslant 2\pi$, 记 A_w 在 Z 平面上的提升为 $\widetilde{A}_w$,$\zeta_j(w)$的提升为 $Z_j(w)$,则存在仿射变换$\hat{H}_w: \widetilde{A}_{w_0} \mapsto \widetilde{A}_w$,

$$\hat{H}_w(\log z) = a(\log|\lambda(w)| + \mathrm{i}\arg\lambda(w)) + \log r_0 + \mathrm{i}(\theta - a\log\lambda(w_0))(\mathrm{mod}\, 2\pi\mathrm{i}),$$

这里 $a = (\log|z| - \log r_0)/(\log r_1(w_0) - \log r_0), \theta = \arg z$, 那么, $\hat{H}_{w_0} = id$, 且在 $\log|z| = \log r_0$ 上,$\hat{H}_w = id$; 在 $\log|z| = \log r_1(w_0)$ 上,$\hat{H}_w$

将 $\log z$ 映成 $\log \dfrac{\lambda(w)}{\lambda(w_0)} z$，而且，$\hat{H}_w$ 关于 w 是全纯的．记 $\hat{Z}_j(w) = \hat{H}_w^{-1}(Z_j(w))$，那么容易构造同胚 $\hat{G}_w: \widetilde{A}_{w_0} \mapsto \widetilde{A}_{w_0}$ 满足 $\hat{G}_{w_0} = id, \hat{G}_w | \partial A_{w_0} = id$，且 $\hat{G}_w(Z_j(w_0)) = \hat{Z}_j(w)$，$\hat{G}_w$ 关于 w 全纯. 令 $G_w = \hat{H}_w \circ \hat{G}_w$，$g_w$ 是 G_w 在 A_{w_0} 上的投影，那么，g_w 全纯依赖于 w，且在 $\partial \Delta_{r_0}$ 上，$g_w(z) = z$，$g_w(\lambda(w_0)z) = \lambda(w)z$，$z \in \partial\Delta_{r_0}$ 以及 $g_w(\zeta_j(w_0)) = \zeta_j(w)$，$g_{w_0} = id$. 这样，我们在 $\overline{A}_{w_0}$ 上定义了 g_w，对任意 $z \in \Delta_{r_0}$，存在 $z_0 \in \overline{A}_{w_0}$，使得 $z = \lambda^n(w_0)z_0$. 利用 $g_w(z) = \lambda^n(w) \cdot g_w(z_0)$，可将 g_w 的定义扩充到整个 Δ_{r_0} 上，从而，g_w 构造完毕. 证毕．

推论 5.3　令 $\varphi_w = h_w^{-1} \circ g_w \circ h_{w_0}$，那么，$\varphi_w: V_{w_0} \mapsto V_w$ 是 R_{w_0} 与 R_w 在吸引不动点处的局部拓扑共轭，全纯依赖于 w，且 $\varphi_w(R_{w_0}^n(c_j(w_0))) = R_w^n(c_j(w))$.

下面考虑超吸引周期点的情形．设 $w_0 \in W_0 \subset \Omega$ 同前，$c_0 = c(w_0)$ 是 R_{w_0} 的一个超吸引不动点，则 c_0 是 R_{w_0} 的临界点，由保持临界轨道关系可知，如果 $c(w)$ 是 R_w 的临界点，$c(w_0) = c_0$，则 $c(w)$ 是 R_w 的超吸引不动点. 进一步，由 $\Omega \subset H$，如果 $\alpha(w)$ 是 R_w 的不动点，满足 $\alpha(w_0) = c_0$，则必有 $\alpha(w) = c(w)$，由引理 5.7，存在 c_0 的邻域 V_0，$R_w(\overline{V_0}) \subset V_0$，以及共形共轭 $h_w: V_0 \mapsto \mathscr{C}$，满足 $h_w(c(w)) = 0$，$h_w \circ R_w(z) = h_w(z)^m$（$m \geqslant 2$ 与 w 无关）.

若 $c(w)$ 吸引 $s \leqslant k$ 个临界轨道（不包括$c(w)$本身），不妨仍记为 $c_1(w)$，$c_2(w)$，…，$c_s(w)$，取 $r_0 < 1$ 充分小，令 $V_w = h_w^{-1}(\Delta_{r_0})$，使得 ∂V_w 与每个 $c_j(w)$ 的轨道不相交．令 $z_j(w)$ 为 $c_j(w)$ 的轨道首次进入 V_w 的点，那么，由于保持临界轨道关系，因此对 $i \neq j$，$z_i(w_0)$ 与 $z_j(w_0)$ 属于超吸引分支的同一叶片，等价于对所有 $w \in W_0$，$z_i(w)$ 与 $z_j(w)$ 属于同一叶片（W_0 取充分小）. 记 $\zeta_j(w) = h_w \circ z_j(w)$，那么，或者 $|\zeta_j(w)| \equiv |\zeta_i(w)|$，或者对任意 $w \in W_0$，$|\zeta_j(w)| \neq |\zeta_i(w)|$. 对前一情形，由于 ζ_i/ζ_j 的模长是常数，故其本身必为常数，因此，对一切 $w \in W_0$，$\zeta_j(w) = e^{i\theta}\zeta_i(w)$，$\theta \in \mathscr{R}$（图 5.1）.

引理 5.10　存在映射 $g: W_0 \times \Delta_{r_0} \mapsto \mathscr{C}$，$g_w(z) = g(w, z)$，满足：

1) 对每个 $w \in W_0$, g_w 是 Δ_{r_0}到 Δ_{r_0}的同胚, $g_{w_0} = id$;

2) 对每个 $z \in \Delta_{r_0}$, $g(w, z)$是 w 的全纯函数;

3) $g_w(z^m) = (g_w(z))^m, z \in \Delta_{r_0}, w \in W_0$;

4) $g_w \circ \zeta_j(w_0) = \zeta_j(w)$, $w \in W_0$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

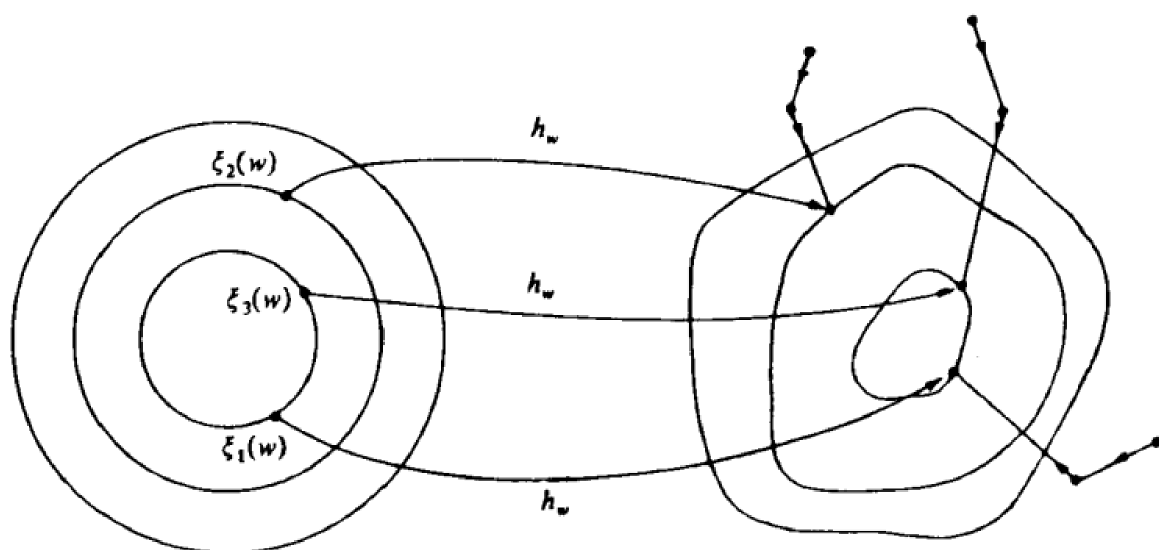


图 5.1 $w \in W_0, \zeta_j(w) = e^{i\theta}\zeta_i(w)$, $\theta \in \mathscr{R}$

证明 记 $\Delta_{r_0}^m = \{z^m | z \in \Delta_{r_0}\}$, $A = \Delta_{r_0} \setminus \overline{\Delta}_{r_0}^m$, 则由定义,每个 $\zeta_j(w) \in A$, 且 $\zeta_j(w) \notin \partial A$.

按下列方式对$\{\zeta_j(w_0)\}$重新排序:

$$|\zeta_1(w_0)| < |\zeta_2(w_0)| < \cdots < |\zeta_l(w_0)|, l \leqslant s.$$

而对 $l < j \leqslant s$, 存在 $1 \leqslant i(j) \leqslant l$, 使得

$$|\zeta_j(w_0)| = |\zeta_{i(j)}(w_0)|,$$

那么,对一切 $w \in W_0$,

$$r_0^m < |\zeta_1(w)| < |\zeta_2(w)| < \cdots < |\zeta_l(w)| < r_0,$$

以及

$$|\zeta_j(w)| = |\zeta_{i(j)}(w)|, \ l < j \leqslant s.$$

对 $z \in A$, 用极坐标表示 $z = re^{i\theta} = (r, \theta)$, 记

$$\zeta_j(w) = (r_j(w), \theta_j(w)), \ l \leqslant j \leqslant s,$$

那么,在 A 上定义 $g_w: A \mapsto A$, $g_w(r, \theta) = (R_w(r), \Theta_w(r) + \theta)$ 如下:

$\log R_w(r)$是分段线性的，满足$\log R_w(r_j(w_0)) = \log r_j(w)$，$1 \leqslant j \leqslant l$，$R_w(r_0) = r_0$，$R_w(r_0^m) = r_0^m$，在圆环$\{(r, \theta) | r_j(w_0) < r < r_{j+l}(w_0)\}$内，

$$\log R_w(r) = a_j \cdot \log r_{j+1}(w) - b_j \log r_j(w), 0 \leqslant j \leqslant l.$$

这里$a_j = (r - r_j(w_0))/(r_{j+1}(w_0) - r_j(w_0))$，$b_j = (r - r_{j+1}(w_0))/(r_{j+1}(w_0) - r_j(w_0))$，当$j = 0$时，$r_j(w_0) = r_0^m$，当$j = l + 1$时，$r_j(w_0) = r_0$.

$\Theta_w(r)$也是分段线性的，满足$\Theta_w(r_j(w_0)) = \theta_j(w) - \theta_j(w_0)$，$\Theta_w(r_0^m) = \Theta_w(r_0) = 0$，在$\{(r, \theta) | r_j(w_0) < r < r_{j+1}(w_0)\}$上，

$$\Theta_w(r) = a_j \theta_{j+1}(w) - b_j \theta_j(w), \ 0 \leqslant j \leqslant l,$$

$\theta_0(w) = \theta_{l+1}(w) = 0$，那么，我们得$g_w$是$A$到$A$的同胚，关于$w$全纯，$g_w \circ \zeta_j(w_0) = \zeta_j(w)$，而且，$g_w | \partial A = id$，在圆周$\{|z| = 常数\}$上，$g_w$是线性的(一个旋转)，因此，我们在$\overline{A}$上定义好了$g_w$，满足1)，2)，4)．对任意$z \in \Delta_{r_0}$，存在$z_0 \in A$，使得$z = z_0^{m^n}$，那么利用$g_w(z) = g_w(z_0)^{m^n}$，扩充到$z$，由于$g_w$在圆周$\{|z| = 常数\}$上是一旋转，故扩充不依赖于根$z_0$的选取．这样，我们在整个$\Delta_{r_0}$上定义了$g_w$，且满足条件3)．构造完毕．证毕．

推论 5.4 令$\varphi_w = h_w^{-1} \circ g_w \circ h_{w_0}$，那么，$\varphi_w : V_{w_0} \mapsto V_w$是$R_{w_0}$与$R_w$在超吸引不动点处的局部拓扑共轭，全纯依赖于$w$，且$\varphi_w(R_{w_0}^n(c_j(w_0))) = R_w^n(c_j(w))$，$l \leqslant j \leqslant s$.

下面我们可以证明定理5.9.

定理 5.9 $R_w \in \mathrm{Rat}_d$是结构稳定的充要条件是$w \in \Omega$，而且如果$w_0 \in \Omega$，则存在w_0的邻域$W_0 \subset \Omega$，使得其共轭映射$\varphi : W_0 \times \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，$\varphi_w(z) = \varphi(w, z)$是$\hat{\mathscr{C}}$上的全纯运动，从而$\varphi_w$是拟共形共轭.

证明 必要性是显然的，我们证明充分性，即若$w_0 \in \Omega$，则R_{w_0}是结构稳定的．我们在假定R_{w_0}没有 Herman 环的情形下给出证明．这时，R_{w_0}仅有吸引和(或)超吸引周期点．又若R_{w_0}的 Fatou 集为空集，即

$J(R_w)=\hat{\mathscr{C}}$，则 J-稳定性已蕴含了结构稳定性，下面假定 $F(R_{w_0})\neq\varnothing$.

设 W_0 是 w_0 的任意小邻域，$W_0\subset\Omega$，考虑 $w\in W_0$，设 R_w 的所有吸引和超吸引周期轨道有 n 个（为叙述简单不妨设它们都是不动点），记为 $a_1(w)$，…，$a_n(w)$，由推论 5.3 和推论 5.4，对每个$a_j(w)$，存在邻域V_{jw}及局部拓扑共轭映射 $\varphi_{jw}:V_{jw_0}\mapsto V_{jw}$，使得在 V_{jw_0}上，$\varphi_{jw}\circ R_{w_0}=R_w\circ\varphi_{jw}$，而且 $z\in V_{jw_0}$ 属于 R_{w_0}的临界轨道当且仅当$\varphi_{jw}(z)$属于 R_w 的某个临界轨道. 进一步使 $V_{jw}\cap V_{iw}=\varnothing$，$i\neq j$.

令 $U_w=\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant n}V_{jw}$，记 $U_0=U_{w_0}$，则 $R_w(\overline{U}_w)\subset U_w$，且

$$\bigcup_{n\geqslant 0}R_{w_0}^{-n}(U_0)=F(R_{w_0}),\tag{5.6}$$

定义映射 $\varphi_w:U_0\mapsto U_w$ 如下：$\varphi_w|V_{jw_0}=\varphi_{jw}$，那么，我们有

(i) φ_w 是同胚且关于 w 全纯，$\varphi_{w_0}=id$；

(ii) $\varphi_w\circ R_{w_0}(z)=R_w\circ\varphi_w(z)$，$z\in U_0$，$w\in W_0$；

(iii) z 属于 R_{w_0}的临界轨道当且仅当 $\varphi_w(z)$属于 R_w 的临界轨道.

若记 $O^+(C_w)$是 R_w 的临界轨道全体，$U_w^*=U_w\backslash O^+(C_w)$. 那么，$\varphi_w$ 是 U_0^* 到 U_w^* 的同胚，而且

$$F_0^*=\bigcup_{n\geqslant 0}R_{w_0}^{-n}(U_0^*)=F(R_{w_0})\backslash GO(C_{w_0}).$$

这里 $GO(C_{w_0})$是 R_{w_0}的临界点全体的大轨道. 显然，F_0^* 在 $F(R_{w_0})$内稠密，从而在$\hat{\mathscr{C}}$内稠密. 下面，我们将 φ_w 扩充到 F_0^* 上.

对任意 $z\in F_0^*$，存在某个 n，使得 $R_{w_0}^n(z)\in U_0^*$，那么，由于$R_{w_0}^n(z)$与临界轨道不相交，$(R_{w_0}^n)'(z)\neq 0$，由隐函数定理，存在 w_0 的邻域 $W'_0\subset W_0$，以及 W'_0 上的全纯函数 $z(w)$，使得 $z(w_\partial)=z$，且

$$R_w^n(z(w))=\varphi_w\circ R_{w_0}^n(z).\tag{5.7}$$

我们说 $z(w)$可以全纯扩充到整个 W_0 上使得(5.7)式成立，若不然，设 $z(w)$可全纯扩充到 $W_1\subset W_0$ 但 $W_1\neq W_0$，则存在点列 $w_k\in W_1$，$w_k\mapsto w'\in\partial W_1(k\mapsto\infty)$，$w'\in W_0$. 由于$\hat{\mathscr{C}}$是紧的，$z(w_n)$有极限

点 z' 满足 $R_{w'}^n(z') = \varphi_{w'} \circ R_{w_0}^n(z)$，且由于 $R_{w_0}^n(z)$ 与临界轨道不相交以及 φ_w 的性质 3)，$R_{w'}^n(z')$ 与临界轨道不相交，因此由隐函数定理，$z(w)$ 可以开拓到 w' 的邻域内，从而得到矛盾，因此，$z(w)$ 是 W_0 上全纯函数，于是，我们令 $\varphi_w(z) = z(w)$，$w \in W_0$，$z \in F_0^*$. 由 φ_w 的性质 2)，其定义与 n 无关，是唯一确定的.

现在我们在 F_0^* 上定义了 φ_w，满足

$$\varphi_w \circ R_{w_0}^n(z) = R_w^n \circ \varphi_w(z), \tag{5.8}$$

且 $\varphi_{w_0}=id$，φ_w 关于 w 全纯. 如果对每个 $w\in W_0$，φ_w 是 F_0^* 上的单射，则 $\varphi(w, z) = \varphi_w(z)$ 为 $W_0\times F_0^*$ 上的全纯运动. 下面证明 φ_w 在 F_0^* 上是单射.

由 φ_w 的定义以及性质 3)，如果 $z \in F_0^*$ 与 R_{w_0} 的临界轨道不相交，则 $\varphi_w(z)$ 也与 R_w 的临界轨道不相交 ($w \in W_0$). 现对任意 z_1，$z_2 \in F_0^*$，如果存在 $w' \in W_0$ 使 $\varphi_{w'}(z_1) = \varphi_{w'}(z_2) = \zeta$，我们要证明 $z_1 = z_2$. 如若不然，$z_1 \neq z_2$，则由唯一性定理，存在 $w_k \in W_0$，$w_k \to w'$ $(k \to \infty)$，使得

$$\varphi_{w_k}(z_1) \neq \varphi_{w_k}(z_2). \tag{5.9}$$

另一方面，存在 n，使得 $R_{w_0}^n(z_i) \in U_0^*$，$i = 1,2$，由

$$\varphi_{w'} \circ R_{w_0}^n(z_1) = R_{w'}^n \circ \varphi_{w'}(z_1) = R_{w'}^n \circ \varphi_{w'}(z_2) = \varphi_{w'} \circ R_{w_0}^n(z_2),$$

及 $\varphi_{w'}$ 在 U_0^* 内为单射，得 $R_{w_0}^n(z_1) = R_{w_0}^n(z_2)$，因此，对 $w = w_k$，

$$R_{w_k}^n \circ \varphi_{w_k}(z_1) = \varphi_{w_k} \circ R_{w_0}^n(z_1) = \varphi_{w_k} \circ R_{w_0}^n(z_2) = R_{w_k}^n \circ \varphi_{w_k}(z_2). \tag{5.10}$$

由于 z_1，z_2 与 R_{w_0} 的临界轨道不相交，故 ζ 与 $R_{w'}^n$ 的临界点不相交，且存在 w' 的充分小邻域 $W' \subset W_0$，使当 $w \in W'$ 时，ζ 与 R_w^n 的临界点也不相交，因此存在 ζ 的邻域 N，使得 R_w^n 在 N 上均为单射 ($w \in W'$). 但 $\varphi_{w_k}(z_1) \to \varphi_{w'}(z_1) = \zeta$，$\varphi_{w_k}(z_2) \to \zeta$ $(k\to\infty)$，故当 k 充分大时，$\varphi_{w_k}(z_i) \in N$，$i = 1, 2$. 这样，(5.9)式和(5.10)式与 $R_{w_k}^n$ 在 N 上单射矛盾. 这

就证明了 φ_w 是单射,且为 $W_0\times F_0^*$ 上全纯运动.

由于 $\overline{F_0^*}=\hat{\mathscr{C}}$,由 λ-引理,$\varphi_w$ 可扩充为 $W_0\times\hat{\mathscr{C}}\mapsto\hat{\mathscr{C}}$的全纯运动,且仍保持(5.8)式,因此,$\varphi_w$ 是 R_{w_0}与 R_w 间的拓扑共轭,全纯依赖于 $w\in W_0$,即 R_{w_0}是结构稳定的.由 λ-引理,φ_w 还是拟共形共轭.证毕.

上面定理结合定理 5.8,我们有:结构稳定的有理函数在 Rat_d 中形成一个稠密开集 Ω,称为结构稳定性.定理也告诉我们,临界轨道的状态决定了有理函数的拓扑动力学性质.

参考文献

[Mss] R. Mañé, P. Sad. and D. Sullivan, On the dynamics of rational maps. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 16(1983) 193-217.

[ST] D. Sullivan and W. Thurston, Extending holomorphic motions. *Acta Math.* (1986) 243-257.

[Lyu] M. Yu. Lyubich, An analysis of stability of the dynamics of rational functions. *Teor. Funktsii. Funktional Anal. i Prilozhen.* 42 (1984) 72-91. Eng. Tran: *Selecta Math. Sovietica* 9(1990) 69-90.

[GF] H. Granert and K. Fritzsche, *Several complex variables.* New York, Springer-Verlag 1976.

[GR] R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables.* Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall 1965.

[BR] L. Bers and H. L. Royden, Holomorphic families of injections. *Acta Math.* 157(1986).

[Sl] Z. Slodkowski, Holomorphic motions and polynomial hulls. *Proc. Amer. Math. Soc.* 111(1991).

第六章　多项式的动力学

在复解析动力系统中，多项式的动力学有其特殊的地位，Fatou 早就对多项式的迭代有过研究. 近年来 Mandelbrot 在研究分形几何时，考察了多项式 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$，并介绍了著名的现今以他的名字命名的集合——Mandelbrot 集. Mandelbrot 集复杂而又完美的结构吸引了众多的学者去研究它，Donady 和 Hubbard[DH1, DH2]的开创性工作使得我们对多项式动力系统有了更深刻的了解，他们所发展的理论对多项式动力系统的研究提供了相当有力的工具，因此，相对于有理函数来说，多项式动力系统的研究要深入得多. 本章将主要介绍 Donady和Hubbard及其学派的工作，同时，也介绍作者在这方面的一些工作.

§ 6.1　填充 Julia 集

任何一个 d 次多项式 ($d \geq 2$) 在仿射变换 $\varphi(z) = cz + d$ 下，共轭于下面的规范形式：

$$P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

因此，我们只需讨论上述形式的多项式的动力学性质. 记 Poly_d 为 d 次首一多项式空间，那么，在上面的规范形式下，它是一个 $d-1$ 维复解析流形.

对于多项式 $P(z) = z^d + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathrm{Poly}_d (d \geq 2)$，$\infty$有其特殊的地位，它是一个 Fatou 例外点，即 $P^{-1}(\infty) = \infty$. 因而是一个 $d-1$ 重临界点，且是一个超吸引不动点，记 $A_P(\infty)$是∞的直接吸引域(超吸引 Fatou 分支)，由于 $P^{-1}(\infty) = \infty$，$A_P(\infty)$是 P-完全不变的

Fatou 分支，故 $A_P(\infty) = \{z \in \mathscr{C} | P^n(z) \to \infty (n \to \infty)\}$，由定理 3.2，$P(z)$的 Julia 集 $J(P) = \partial A_P(\infty)$.

注 对多项式来说，$J(P)$上的任一点是 Fatou 分支 $A_P(\infty)$的边界点，McMullen 找到一个有理函数，在其 Julia 集上存在这样的点：它不是任何 Fatou 分支的边界点[Mc].

定义 6.1 设 P 是度 $d \geqslant 2$ 的多项式，则称紧集

$$K(P) = \{z \in \mathscr{C} | P^n(z) \not\to \infty (n \to \infty)\} \qquad (6.1)$$

为多项式 P 的填充 Julia 集，简记为 K_p 或 K.

由定义，$K(P) = \mathscr{C} \backslash A_P(\infty)$，$J(P) = \partial K(P) = \partial A_P(\infty)$，正因为如此，在多项式动力学研究中，常常用对 $K(P)$的研究代替对 $J(P)$的研究.

$K(P)$的另一等价定义为

$$K(P) = \{z \in \mathscr{C} | \{P^n(z)\} \text{ 有界}\}. \qquad (6.2)$$

由定理 3.2，我们可以叙述下面的定理.

定理 6.1

1) $K(P)$是完全不变的紧集，其内点集的任一连通分支是单连通的 Fatou 分支；

2) P 的任何有界 Fatou 分支是单连通的，因此，多项式没有 Herman 环.

除了∞以外，P 还有 $d-1$ 个(计重数)有限临界点，记 C' 为有限临界点集.

定理 6.2 设 P 为度 $d \geqslant 2$ 的多项式，则其 Julia 集 $J(P)$连通的充要条件是 P 的所有有限临界点都在填充 Julia 集 $K(P)$内.

证明 充分性：若 $C' \subset K(P)$，则 $A_P(\infty)$内不含除∞以外的其他临界点. 由定理 2.8，$A_P(\infty)$共形等价于单位圆盘，是单连通开集，因此，$J(P) = \partial A_P(\infty)$ 是连通的.

必要性：如果 $J(P)$连通，则 $A_P(\infty)$单连通. 设 $A_P(\infty)$含有 k 个有限临界点，则由 Riemann-Hurwitz 公式，$\chi(A_P(\infty)) = d \cdot \chi(A_P(\infty))$

$-(d-1)-k$，而 $\chi(A_P(\infty))=1$，因此得 $k=0$，故 $C'\subset K(P)$. 证毕.

下面讨论另一极端情形：$C'\subset A_P(\infty)$.

定义 6.2 一个拓扑空间(或子集)称为完全不连通的，如果它的每个连通分支由单个点组成.

Cantor 三分集是典型的完全不连通的完全集.

设 $N_d=\{1,2,\cdots,d\}$，$\Sigma_d=\{s=(s_1,s_2,\cdots)\mid s_n\in N_d,n=1,2,\cdots\}$ 是 N_d 的无穷乘积空间，对 $s=(s_1,s_2,\cdots)$，$t=(t_1,t_2,\cdots)\in\Sigma_d$，定义距离 $h(s,t)=\Sigma\dfrac{|s_n-t_n|}{d^n}$，那么容易验证，在距离 h 下 Σ_d 是一个完全不连通的度量空间. 在 Σ_d 上定义自映射 $\sigma:\Sigma_d\mapsto\Sigma_d$，$\sigma(s_1,s_2,\cdots)=(s_2,s_3,\cdots)$，称为位移映射，由 σ 的迭代生成的动力系统称为符号动力系统. 关于符号动力系统的基本理论可参看文献[Dev].

定义 6.3 一个集合称为(广义的)Cantor 集，如果它同胚于某个 Σ_d.

定理 6.3 设 $P(z)$为度 $d\geqslant 2$ 的多项式，如果它的有限临界点都不在 $K(P)$内，则其 Julia 集 $J(P)$是 Cantor 集，且 $P|_{J(P)}$拓扑共轭于 Σ_d 上的位移映射 σ.

证明 先对 $d=2$ 证明. 这时 $P(z)$是二次多项式，只有一个有限临界点 c. 取∞的单连通邻域 U，使得 $P^{-1}(U)\supset U$，则 $U\subset P^{-1}(U)\subset P^{-2}(U)\subset\cdots$，且 $A_p(\infty)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P^{-n}(U)$. 此时，存在最小的 N，使 $P(c)\in\overline{P^{-N}(U)}$，且 $c\notin P^{-N}(U)$，由 Riemann-Hurwitz 公式，$P^{-N}(U)$是单连通的，且 $B=\hat{\mathscr{C}}\setminus\overline{P^{-N}(U)}$ 也是单连通的. 由于 B 不含有$P(z)$的临界值，$P^{-1}(B)$由两个单连通分支 D_0 和 D_1 组成 $D_0\cup D_1\subset B$，$P:D_i\mapsto B$ 是共形映射，$i=0,1$，考虑 $P^{-m}(B)$，$m=1,2,\cdots$，则 $K(P)=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}P^{-m}(B)$，$P^{-m}(B)$ 由 2^m 个单连通分支组成(见图 6.1). 由第三章引理 3.1 可知，每个分支的直径当 m 趋于无穷大时趋向于零，因此 $K(P)$的每个分支是单点，这样 $J(P)=K(P)$.

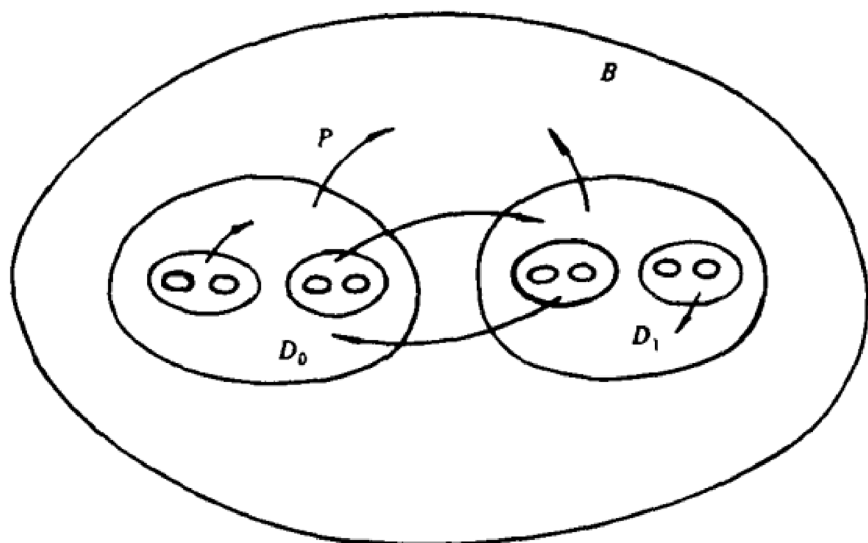


图 6.1 定理 6.3 的证明示意图

现在定义映射 $\varphi: J(P) \mapsto \Sigma_2$，对任意 $z_0 \in J(P)$，定义 $s = (s_1, s_2, \cdots) = \varphi(z_0)$ 如下：$s_n = i$ 如果 $P^n(z_0) \in D_i$，$i = 0, 1$，那么我们断言：φ 是同胚. 首先，φ 是一一到上的，事实上，对 $s = (s_1, s_2, \cdots)$，序列 $I_{s_1} \circ I_{s_2} \circ \cdots \circ I_{s_n}(B)$ 收敛于唯一的一点 $z_0 \in J(P)$，这里 I_i 表示 P^{-1} 的两个单值分支，使 $I_i: B \mapsto D_i (i = 0, 1)$. 其次，$s$ 的邻域 $i(t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots) | \{t_1 = s_1, \cdots, t_n = s_n\}$ 对应于 z_0 的邻域 $I_{s_1} \circ \cdots \circ I_{s_n}(B)$，因而 φ 是一个连续开映射，因此 $\varphi: J(P) \mapsto \Sigma_2$ 是同胚，$J(P)$ 是一个 Cantor 集. 由构造 $\varphi \circ P|_{J(P)} \circ \varphi^{-1}(s_1, s_2, \cdots) = (s_2, s_3, \cdots) = \sigma(s_1, s_2, \cdots)$，故 φ 是 $P|_{J(P)}$ 与 σ 的拓扑共轭映射.

对于 $d > 2$ 的情形，$P(z)$ 的有限临界点多于一个，此时也可选取单连通区域 B，使得 $J(P) \subset P^{-1}(B) \subset B$，且所有的有限临界点都在 B 外. 与上面同样的方法可构造共轭同胚 $\varphi: J(P) \mapsto \Sigma_d$，$J(P)$ 是一个 Cantor 集. 证毕.

第二章中的例 2.3 给出了一个 Julia 集为 Cantor 集的例子，下面的图 6.2 给出了另一个例子.

注 Fatou 曾经猜想定理 6.3 的逆命题成立，即有限临界点集 $C' \subset \mathscr{C} \setminus K(P)$ 是 $J(P)$ 为 Cantor 集的充要条件. 但 Brolin 在文献[Br]中找到这样的三次多项式 P，其两个有限临界点中，一个属于 $K(P)$，

另一个属于$\mathscr{C}\backslash K(P)$，而$J(P)$仍是 Cantor 集. Branner 和 Hubbard[BH] 利用他们的具有高度技巧性的方法，对三次多项式的 Julia 集何时为 Cantor 集给出了一个完整的描述.



图 6.2 映射 $f(z)=z^2+0.11031-0.67037\mathrm{i}$ 的 Julia 集，这是一个 Cantor 集

§6.2 等势曲线与外射线

考虑d次首一多项式$P(z)=z^d+a_{d-1}z^{d-1}+\cdots+a_0\in \mathrm{Poly}_d$，$d\geqslant 2$，由 Böttcher 定理（定理 2.7），存在∞的邻域$U(\infty)$到邻域$U_R(\infty)$的共形同胚$\varphi_P: U(\infty)\mapsto U_R(\infty)$，满足$\varphi_P(\infty)=\infty$，$\varphi_P'(\infty)=1$，使得$\varphi_P\circ P\circ\varphi_P^{-1}(z)=z^d$. 这里$U_R(\infty)=\{z\in\overline{\mathscr{C}}\mid |z|>R\}$. 由 Böttcher 定理的证明，$\varphi_P(z)$可表示为

$$\varphi_P(z)=\lim_{n\to\infty}(P^n(z))^{1/d^n}=z\cdot\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(P^{n+1}(z))^{1/d^{n+1}}}{(P^n(z))^{1/d^n}},\tag{6.3}$$

它定义在∞的邻域$U(\infty)$内.

现设

$$h_P(z)=\lim_{n\to\infty}d^{-n}\log_+|P^n(z)|,\tag{6.4}$$

这里$\log_+x=\max(\log x, 0)$. $h_P(z)$是定义在$\mathscr{C}$上的实值函数，具有引

理 6.1 所述性质.

引理 6.1

1) h_P 是$\mathscr{C}$上的连续函数;

2) $h_P(P(z)) = d \cdot h_P(z)$;

3) $K(P) = \{z \in \mathscr{C} | h_P(z) = 0\}$, 且 h_P 在 $\mathscr{C} \backslash K(P)$ 上调和.

证明 1) $h_P(z)$由公式 $h_P(z) = \lim\limits_{n \to \infty} d^{-n} \log_+ |P^n(z)|$ 给定,我们证明上式之上极限在$\mathscr{C}$上一致收敛. 将 $h_P(z)$写成级数形式:

$$h_P(z) = \log_+ |z| + \sum_{n=0}^{\infty} (d^{-(n+1)} \log_+ |P^{n+1}(z)| - d^{-n} \log_+ |P^n(z)|),$$

由于 $\frac{P(z)}{z^d} = 1 + \frac{a_{d-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^d}$, 存在连续依赖于 P 但不依赖于 z 的常数 $C(P)$,例如 $C(P) = d \cdot \log 2 + d \cdot \log(1 + |a_{d-1}| + \cdots + |a_0|)$, 使得

$$|\log_+ |P(z)| - d \log_+ |z|| \leqslant C(P),$$

因此

$$|d^{-(n+1)} \log_+ |P^{n+1}(z)| - d^{-n} \log_+ |P^n(z)|| \leqslant C(P) \cdot d^{-(n+1)},$$

故级数一致收敛,h_p 在$\mathscr{C}$上定义且连续.

2) 是显然的.

3) 在∞的邻域 $U(\infty)$内,我们有共形同胚 $\varphi_P(z)$. 由定义 $h_P(z) = \log |\varphi_P(z)|$, 故 h_P 在 $U(\infty)$内调和. 对于任意 $z \in \mathscr{C} \backslash K(P)$, 存在 n 充分大,使得 $P^n(z) \in U(\infty)$. 由 2), $h_P(z) = d^{-n} h_P(P^n(z))$, 故 h_P 在 $\mathscr{C} \backslash K(P)$ 内调和. 自然,对 $z \in \mathscr{C} \backslash K(P)$,$h_P(z) \neq 0$. 另一方面,若 $z \in K(P)$, 则 $|P^n(z)|$ 有界,因而 $h_P(z) = \lim\limits_{n \to \infty} d^{-n} \log_+ |P^n(z)| = 0$, 所以 $K(P) = \{z \in \mathscr{C} | h_P(z) = 0\}$.

证毕.

从证明中可以看出: $h_P(z) = \log |z| + o(1)(z \to \infty)$, 因此,由引理,$h_P$ 是 $\mathscr{C} \backslash K(P)$ 上的 Green 函数.

定义 6.4 称 h_P 为多项式 P 的势函数,曲线 $\{z \in \mathscr{C} \backslash K(P) |$

$h_P(z) = r > 0\}$ 为等势曲线,其正交轨线 $R(P, \theta)$为外射线.

在 $U(\infty)$ 内, $R(P, \theta) = \{z|\arg\varphi_P(z) = 2\pi\theta\}$, 等势曲线为 $\{z|\varphi_P(z)| = C > 1\}$,因此,等势曲线在$U(\infty)$内是简单闭曲线. 图 6.3 给出了一个在 Julia 集外部画出了等势曲线和外射线的例子.

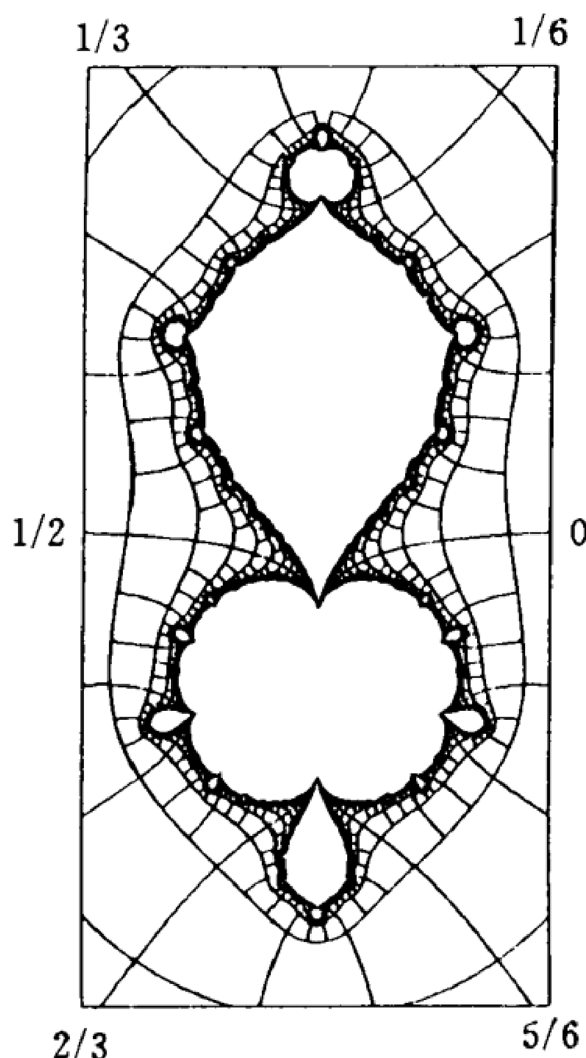


图 6.3 带有等势曲线和外射线的 Julia 集, $f(z) = z^3 - \mathrm{i}z^2 + z$

引理 6.2 $h_P : \mathscr{C}\backslash K(P) \mapsto \mathscr{R}_+ = (0, \infty)$ 的临界点(等势曲线的非光滑点)是 P 在 $\mathscr{C}\backslash K(P)$ 中的临界点及其逆轨道.

证明 由于 $\varphi_P : U(\infty) \mapsto U(\infty)$ 是共形映射,故 $h_P(z) = \log|\varphi_P(z)|$ 在 $U(\infty)$中没有临界点. 由 $h_P(z) = d^{-n}h_P(P^n(z))$ 可知,z 是 h_P 的临界点当且仅当 z 是 P^n 的临界点或者 $P^n(z)$是 h_P 的临界点.

设 $z \in \mathscr{C}\backslash K(P)$, $z_n = P^n(z)$, 当 n 充分大时, $z_n \in U(\infty)$, 故 z_n

不是 h_P 的临界点,因此,z 是 h_P 的临界点当且仅当 z 是 P^n 的临界点,即 z 是 P 的临界点或其逆轨道中的点. 证毕.

当 $R(P, \theta)$不碰撞到 h_P 的临界点时,$R(P, \theta)$可以从 $U(\infty)$无分叉地延拓直到 $h_P \to 0$, 即 $R(P, \theta)$趋向于 $K(P)$,我们称这样的 $R(P, \theta)$是非碰撞的. 此时,如果$R(P, \theta)$趋向于 $K(P)$上的一点 α,则称$R(P, \theta)$在 α 点可达. 如果$R(P, \theta)$趋向于 $K(P)$时的聚点集是非单点的连通集,则称之为游移的.

若 $R(P, \theta)$是非碰撞的,有 $P(R(P, \theta))=R(P, d\cdot\theta)$,故如果 $R(P, \theta)$在 α 点可达,则$R(P, d\cdot\theta)$在 $P(\alpha)$点可达;如果 $R(P, \theta)$是游移的,则 $R(P, d\cdot\theta)$也是游移的.

引理 6.3 设 $m \geqslant 2$ 是整数,a 是一个正整数,且 a 与 m 互素,$\phi(m)$表示小于 m 且与 m 互素的正整数的个数,则 $a^{\phi(m)} = 1 \pmod m$.

证明 设 $r_1, \cdots, r_{\phi(m)}$ 是小于 m 且与 m 互素的正整数,我们首先证明: $ar_1 \pmod m, \cdots, ar_{\phi(m)} \pmod m$ 是 $r_1, \cdots, r_{\phi(m)}$ 的重排. 为此只要证明它们互不相同且都与 m 互素. 如果 $ar_i = ar_j \pmod m$, 则由 $(a, m) = 1$ 即得 $r_i = r_j \pmod m$, 于是 $r_i = r_j$. 又如果 s 是 m 与 $ar_i \pmod m$的公共素因子,则 s 也是 m 与 ar_i 的公共素因子,从而 s 是 m 与 a 或 m 与 r_i 的公共素因子,这就得出矛盾,于是,我们有

$$
\begin{aligned}
r_1 \cdot \cdots \cdot r_{\phi(m)} &= (ar_1) \cdot \cdots \cdot (ar_{\phi(m)}) \pmod m \\
&= a^{\phi(m)}(r_1 \cdot \cdots \cdot r_{\phi(m)}) \pmod m,
\end{aligned}
$$

由 $r_1, \cdots, r_{\phi(m)}$ 与 m 互素得 $a^{\phi(m)} = 1 \pmod m$. 证毕.

定理 6.4 设 $\theta = \dfrac{p_0}{q}$ 是有理数,如果$R(P, \theta)$是非碰撞的,则 $R(P, \theta)$在点 $\alpha \in K(P)$ 可达,且存在 n,使$P^n(\alpha)$是排斥的或有理中性的周期点.

证明 如果 $q = 1$, 则 $P(R(P, \theta)) = R(P, \theta)$.

设$q \geqslant 2$, 且 $(q, d) = 1$, 由引理 6.3,存在 k,使得 $d^k = 1 \pmod q$,故 θ 可以写成 $\theta = \dfrac{p}{d^k - 1}$, 因此 $P^k(R(P, \theta)) = R(P, \theta)$.

设 $h_0 = \inf\{h_P(\omega) \mid \omega$ 是 P 在 $\mathscr{C}\backslash K(P)$ 中的临界点$\}$(如果 P 在

$\mathscr{C}\backslash K(P)$ 中没有临界点，令 $h_0=\infty$)，取 $h<h_0$，令 $U=\{z|0<h_P(z)<h\}$，$U'=P^{-k}(U)=\{z|0<h_P(z)<h/d^k\}$，记 $\widetilde{U}$ 是 U'的包含 $R(P,\theta)$的分支 U_1 的万有覆盖，$\widetilde{R}$是 $R(P,\theta)\cap U_1$ 在 $\widetilde{U}$中的提升，$g:\widetilde{U}\mapsto\widetilde{U}$ 是 P^{-k}的提升，使得 $g(\widetilde{R})\subset\widetilde{R}$. 由于 U 内没有 P 的临界值，$P^k:U_1\mapsto U$ 是覆盖映射，故 g 是单值解析映射. 选取 $x_0\in R(P,\theta)\cap U$，定义 $x_n\in R(P,\theta)$，使得 $h_P(x_n)=h_P(x_0)/d^{kn}$，则 $P^k(x_{n+1})=x_n$. 记 $[x_n,x_{n+1}]$ 表示 $R(P,\theta)$在 x_n 到 x_{n+1} 间的一段，l_n 表示 $[x_n,x_{n+1}]$ 在 U 的双曲度量下的长度，那么，由 Schwartz 引理(定理 1.3)，g 为减小的双曲度量，故 $l_n\leqslant l_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant l_0$. 但当 $n\to\infty$ 时，$[x_n,x_{n+1}]\to\partial K(P)$，也即趋向于 U 的边界，由引理 1.5，$[x_n,x_{n+1}]$ 的球面长度趋向于零，特别 $|x_n-x_{n+1}|\to 0$. 如果 $\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_j}\}$ 收敛于 $\alpha\in\partial K(P)$，则 $\{x_{n_j-1}\}$ 也收敛于 α，因此 $P^k(\alpha)=\alpha$，即 $\{x_n\}$ 的聚点集由 P^k 的不动点组成.

考虑 $R(P,\theta)$趋向于 $\partial K(P)$的聚点，对任意点列 $z_j\in R(P,\theta)$，$z_j\to\partial K(P)$，$j\to\infty$，有 $z_j\in[x_{n_j},x_{n_j+1}]$，同样由 Schwartz 引理和引理 1.5，$|z_j-x_{n_j}|\to 0$，即 $\{z_j\}$ 与 $\{x_{n_j}\}$ 有相同的聚点，于是我们得到 $R(P,\theta)$趋向于$\partial K(P)$时的聚点集也由 P^k 的不动点组成. 注意到 $R(P,\theta)$是一条连续曲线，其聚点集是连通的，而 P^k 的不动点仅有有限个，故$R(P,\theta)$必定趋向于某个 P^k 的不动点 $\alpha\in\partial K(P)$，即$R(P,\theta)$ 是可达的. 由于 $\alpha\in\partial K(P)=J(P)$，因此 α 是排斥的或中性的周期点.

下面证明如果 α 是中性周期点，则 $(P^k)'(\alpha)=1$. 证明与引理 1.6 类似.

不妨设 $\alpha=0$，这时 $P^k(z)=e^{2\pi it}z+o(1)(z\to 0)$，$P^k(z)$ 在 0 的充分小邻域 $U=\{z||z|<\varepsilon\}$ 内单叶，作坐标变换 $Z=\log z$，记 $L=\{Z|\mathrm{Re}Z<M\}$ 是 U 在 Z 平面上的提升，$F:L\mapsto\mathscr{C}$ 是 P^k 在 Z 平面上的提升，则当 $\mathrm{Re}Z\to-\infty$ 时，$F(Z)=Z+2\pi it+o(1)$，$t\in[0,1)$. 现在再记 $\widetilde{R}_0$ 是 $R(P,\theta)$在 L 中的提升，X_n 是 x_n 在 $\widetilde{R}_0$ 上的提升，则

$\mathrm{Re}X_n \to -\infty(n \to \infty)$，且 $X_{n-1} = F(X_n)$.

如果 $t > 0$，取 ε 充分小(即 $-M$ 充分大)，那么由 F 的展开式，当 n 充分大时，$\mathrm{Im}X_n < \mathrm{Im}X_{n-1} - \pi t$，$\mathrm{Im}X_n \to -\infty(n \to \infty)$. 现取定 n 充分大，记 V_0 为 L 内位于曲线 $\widetilde{R}_0$ 左边且其虚部小于 $\mathrm{Im}X_n$ 的区域，则 $F^{-1}(V_0) \subset V_0$，且 $F^{-1}(V_0) \neq V_0$. 又记 $V = \exp(V_0) \cup \{0\}$，则 V 是 0 的邻域，且 $P^{-k}(V) \subset V, P^{-k}(V) \neq V$. 由 Schwartz 引理，$P^{-k}$为 V 上严格减小的双曲度量，从而在 P^k 的不动点 0 处，$|(P^{-k})'(0)| < 1$，即 $|(P^k)'(0)| > 1$，这是矛盾的，因此 $t = 0$，即 $(P^k)'(0) = 1$.

如果 $(q, d) \neq 1$，则 $\theta = \dfrac{p_0}{d^l q_1}$，$(q_1, d) = 1$，$P^l(R(P, \theta)) = R(P, \theta_1)$，这里 $\theta_1 = d^l\theta = \dfrac{p_0}{q_1}$. 由于 $R(P, \theta_1)$是可达的，故 $R(P, \theta)$也是可达的. 若 $R(P, \theta)$在 $\alpha \in \partial K$ 处可达，则 $R(P, \theta_1)$在 $\alpha_1 = P^l(\alpha)$ 处可达，且 α_1 是排斥的或有理中性的周期点. 证毕.

如果 $K(P)$连通，则任意 $R(P, \theta)$均是非碰撞的. 一个自然的问题是：是否每一条外射线都是可达的？进一步，局部共形共轭映射 $\varphi_P: A_P(\infty) \mapsto \mathscr{C}\setminus\overline{\Delta}_1$ 是否可以连续开拓到 $\partial A_P(\infty) = J(P)$ 上？这个问题与 Julia 集的局部连通性有关.

§6.3 Julia 集的局部连通性

定义 6.5 称一个紧度量空间(X, ρ)在 $p \in X$ 处是局部连通的，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 ε'，$0 < \varepsilon' < \varepsilon$，使得 $\Delta_{\varepsilon'}(p) = \{x \in X \mid \rho(p, x) < \varepsilon'\}$ 是 p 点的连通开邻域. 一个紧度量空间(X, ρ)称为是局部连通的，如果它在每一点处均是局部连通的.

如果 D 是 $\hat{\mathscr{C}}$ 的某个单连通区域，则有下面著名的 Carathéodory 定理.

定理 6.5(Carathéodory 定理) 设 $D \subset \hat{\mathscr{C}}$ 为单连通区域，共形等价于单位圆盘 Δ，$\varphi: \Delta \mapsto D$ 是共形映射，则 ∂D 是局部连通的充要条件

是 φ 可以延拓为 $\overline{\Delta}$ 到 $\overline{D}$ 的连续映射.

证明参见文献[Ca, Ah]

下面设 P 是度 $d \geqslant 2$ 的首一多项式,$K(P)$是连通的. 此时,P 的所有有限临界点均在 $K(P)$内,由定理 2.8,局部共形共轭映射 φ_P 可共形地延拓为整个 $\mathscr{C}\backslash K(P)$ 到 $\mathscr{C}\backslash\overline{\Delta}$ 的共轭映射: φ_P : $\mathscr{C}\backslash K(P) \mapsto \mathscr{C}\backslash\overline{\Delta}$, $\varphi_P \circ P \circ \varphi_P^{-1}(z) = z^d$. 每一条外射线均是非碰撞的,每一条等势曲线可表示为 $\{z \in \mathscr{C}\backslash K(P) \mid |\varphi_P(z)| = r > 1\}$, 即$\mathscr{C}\backslash\overline{\Delta}$ 内半径为 r 的同心圆的共形象,故是围绕 $K(P)$的简单闭解析曲线.

如果$J(P)$又是局部连通的,则 $\psi = \varphi_P^{-1}$ 可以连续延拓到 $\mathscr{C}\backslash\Delta$ 上,这时,我们可以定义连续映射 $\gamma: T = \mathscr{R}/\mathscr{Z} \mapsto \partial K(P)$,$\gamma(t) = \psi(\mathrm{e}^{2\pi i t})$,称之为 Carathéodory 带.

现设 $R(P, 0)$是辐角为 0 的外射线,取 $\gamma_0: T \mapsto \mathscr{C}\backslash K(P)$ 是一条简单闭曲线(称为闭道路),使得 $\gamma_0(0) \in R(P, 0)$,且分离 $K(P)$与∞,例如,可取 γ_0 为某条等势曲线 $\gamma_0(t) = \psi(r\mathrm{e}^{2\pi i t})(\gamma > 1)$. 下面的命题给出一种 Carathéodory 带的构造方法.

引理 6.4 设 $K(P)$是连通的,则

1) 存在闭道路序列$\{\gamma_n\}$满足 $P(\gamma_{n+1}(t)) = \gamma_n(dt)$, $\gamma_n(0) \in R(P, 0)$;

2) $J(P)$是局部连通的充要条件是$\{\gamma_n\}$一致收敛;

3) 如果 $J(P)$是局部连通的,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$ 是 Carathéodory 带.

证明 1) 记 $\varphi_P(\gamma_0(t)) = \rho(t)\mathrm{e}^{2\pi i\theta(t)}$, 则 $\rho: T \mapsto (1, \infty)$ 与 $\theta: T \mapsto T$ 都是连续的,且 $\deg\theta = 1$, $\theta(0) = 0$. 将 θ 提升为 $\widetilde{\theta}$: $\mathscr{R} \mapsto \mathscr{R}$, 满足 $\widetilde{\theta}(t+1) = \widetilde{\theta}(t) + 1$, $\widetilde{\theta}(0) = 0$, 定义 $\gamma_n(t) = \varphi_P^{-1}(\rho_n(t) \cdot \mathrm{e}^{2\pi i\theta_n(t)})$,这里 $\rho_n(t) = \rho(t)^{\frac{1}{d^n}}$,$\theta_n$ 为 $\widetilde{\theta}_n(t) = \dfrac{1}{\mathrm{d}^n}\widetilde{\theta}(\mathrm{d}^n t)$ 的投影,那么,容易验证 r_n 满足条件 1).

2) 的必要性与 3). 容易验证, $\rho_n \to 1$ 和 $\theta_n \to id$ 在 T 上一致收敛,而 $\gamma_n(t) = \psi(\rho_n(t) \cdot \mathrm{e}^{2\pi i\theta_n(t)})$. 如果 $J(P)$局部连通,则 ψ 可连续延拓到 $\mathscr{C}\backslash\Delta$ 上,因此当 $n \to \infty$ 时,$\gamma_n(t)$一致收敛到 $\psi(\mathrm{e}^{2\pi i t})$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$ 是

Carathéodory 带.

2) 的充分性：设$\{\gamma_n\}$一致收敛到 $\gamma_\infty : T \mapsto \mathscr{C}$，若在 $\partial\Delta$ 上定义 $\psi(e^{2\pi i t}) = r_\infty(t)$，则 ψ 在 $\mathscr{C}\backslash\Delta$ 上连续，只要证明 $r_\infty(T) = \partial K(P)$. 由 Carathéodory 定理可知，$J(P) = \partial K(P)$ 是局部连通的. 现在，由于 $\rho_n \to 1$ 一致收敛，对于 $K(P)$的任意邻域 V，当 n 充分大时，$\gamma_n(T) \subset V$，因此 $\gamma_\infty(T) \subset \partial K(P)$. 另一方面，由 1)，$P(\gamma_{n+1}(t)) = \gamma_n(dt)$，$P : \gamma_{n+1}(T) \mapsto \gamma_n(T)$ 是 d 到 1 的，故 $P^{-1}(\gamma_n(T)) = \gamma_{n+1}(T)$，因此，$P^{-1}(\gamma_\infty(T)) = \gamma_\infty(T)$，即 $\gamma_\infty(T)$是完全不变的，由推论 2.12 知道，$\gamma_\infty(T) = J(P) = \partial K(P)$. 证毕.

下面讨论几何有限多项式的 Julia 集的局部连通性. 由前面所述，一个多项式(有理函数)是几何有限的，如果其临界轨道的闭包与 Julia 集的交是有限集. 此时，在 Faton 集内的临界轨道收敛于吸引(包括超吸引)或有理中性周期轨道，在 Julia 集内的临界轨道是有限集，且最终落于排斥或有理中性周期轨道.

设 P 是几何有限多项式，记 A_- 为 P 的吸引周期点集，A_0 为有理中性周期点集，记 C 是 P 的有限临界点的轨道的并集，将 C 分解为 $C = C_- \cup C_0 \cup C_+$，其中 C_-和 C_0 分别是收敛于吸引周期轨道和有理中性周期轨道的临界轨道集合，C_+ 为 Julia 集 $J(P)$上的临界轨道集合，C_+ 是一个有限集.

下设 $K(P)$连通，记号 $\dot{\Omega}$表示集合 Ω 的内点集.

引理 6.5 存在紧集 Ω，使得

1) $\partial\Omega \supset A_0, \Omega \cap A_- = \varnothing$，$\dot{\Omega} \supset C_+, \Omega \cap (C_0 \cup C_-) = \varnothing$；

2) $J(P) \subset \dot{\Omega} \cup A_0, \gamma_n \subset \dot{\Omega}$ $(n \geqslant 0)$；

3) $P^{-1}(\Omega) \subset \dot{\Omega} \cup A_0$；

4) $\dot{\Omega}$是连通的；

5) $\dot{\Omega} \cap R(P, 0)$ 是连通的.

证明 设 D 为 $K(P)$的一条等势曲线所围成的闭拓扑圆盘，使得 $\gamma_n \subset D(n \geqslant 0)$. 对于 $\alpha \in A_-$，选取拓扑圆盘 Δ_α，使得 $P(\overline{\Delta}_\alpha) \subset \Delta_{P(\alpha)}$，

且 $\overline{\Delta}_a \subset \dot{K}(P)$. 再取 n_- 充分大,使 $B_- = P^{-n_-}(\bigcup_{a\in A_-} \Delta_a) \supset C_-$,则 $\overline{B}_- \subset \dot{K}(P)$. 对于 $\alpha \in A_0$,取 F_α 为定理 2.9 中以 α 为边界点的吸引花瓣 L_j 的并集,满足 $P(F_\alpha \backslash \{\alpha\}) \subset \mathring{F}_{P(\alpha)}$. 由于每个吸引到 α 的临界点最终将落在 F_α 的一个真子集 G_α 内,取 n_0 充分大,使得 $B_0 = \bigcup_{n=1}^{n_0} P^{-n}(\bigcup_{\alpha\in A_0} G_\alpha) \cup \bigcup_{\alpha\in A_0} F_\alpha \supset C_0$,则 $B_0 \subset \dot{K}(P)$,$\overline{B}_0 \subset \dot{K}(P) \cup A_0$. 因此,集合 $\Omega = D\backslash(B_0 \cup B_-)$ 满足引理的所有条件. 证毕.

下面要在 $U = \mathring{\Omega}$ 上定义 Riemann 度量(orbifold 度量,参见第四章 §2),为此,先在 Ω 上定义分支函数如下:如果 $z \notin C_+$,则 $\nu(z) \equiv 1$,对 $z \in C_+$,定义 ν 满足 $\nu(P(z))$是 $\deg_z P \cdot \nu(z)$ 的倍数. 这样,限制在 U 上,(U, ν)是一个 Riemann 曲面 orbifold. 由于 U 是双曲的,由引理 4.3,存在(U, ν)的万有覆盖曲面 $\widetilde{U} \approx \Delta_1$,覆盖映射 $\pi: \widetilde{U} \mapsto (U, \nu)$,满足 $\deg_x \pi = \nu(\pi(x))$. 记 $\widetilde{R}_0$ 是 $R(P, 0) \cap U$ 在 $\widetilde{U}$中的提升,因 $\deg_z P \cdot \nu(z)$是$\nu(P(z))$的因子,$P^{-1}(U) \subset U$,则由引理 4.2,P^{-1}可以提升为 $\widetilde{U}$上的单值映射 $g: \widetilde{U} \to \widetilde{U}$,选取合适的分支,使得 $g(\widetilde{R}_0) \subset \widetilde{R}_0$.

记 ω_0 是 $\widetilde{U}$上的双曲度量,则 g 在 ω_0 下是严格收缩的;再记 $\omega_1 = \pi^* \omega_0$ 是在 U 上诱导的 orbifold 度量,则 P 在度量 ω_1 下在 $P^{-1}(U)$上是严格扩张的.

在局部坐标下,$\omega_1 = \rho_1(z)|\mathrm{d}z|$,那么,当 $z \to a \in C_+$ 时,$\rho_1(z) \sim c_a/|z-a|^{\beta_a}$,这里 c_a 是常数,$\beta_a = \dfrac{\nu(a)-1}{\nu(a)}$,因此,对任意可求长曲线 $\gamma: [0,1] \mapsto P^{-1}(U)$,$\gamma$ 关于度量 ω_1 的长度是有限的,但由于 $A_0 \subset \partial\Omega$,因此还要在 A_0 的邻域内定义度量,使得当 γ 连接 A_0 中的点时,长度仍是有限的,且 P 是严格扩张的.

对 $a \in A_0$,选取拓扑圆盘 Δ_a 以及坐标变换 $\zeta = \zeta_a(z)$,使得 $P: \Delta_a \mapsto \Delta_{P(a)}$ 在新坐标下具有形式:

$$\zeta \mapsto \lambda(\zeta + b_a \zeta^{q_a+1} + \cdots).$$

这里 $b_a > 0$, q_a 是 a 处花瓣的个数, $\lambda^{q_a} = 1$. 取 Δ_a 充分小,使得 $U \cap \Delta_a$ 包含在 a 点的由花瓣组成的邻域内,且 $P(U \cap \Delta_a) \supset U \cap \Delta_{P(a)}$, $P(\overline{\Delta}_a) \cap \overline{\Delta}_b = \varnothing (b \in A_0, b \neq P(a))$. 由于 $U \cap \Delta_a$ 与吸引花瓣不变,因此可使 $|P'(z)| > 1, z \in U \cap \Delta_a$.

如果 $a \in A_0 \backslash C_+$, 则在 Δ_a 上取度量 $\omega_a = \rho_a(z)|\mathrm{d}z| = |\mathrm{d}\zeta_a|$; 如果 $a \in A_0 \cap C_+$, 则取 $\omega_a = \rho_a(z)|\mathrm{d}z| = \dfrac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^{\beta_a}}$ 为 Δ_a 上的度量, $\beta_a = \dfrac{\nu(a)-1}{\nu(a)}$.

现取 $M > 0$, 在 $U \cup (\bigcup\limits_{a \in A_0} \Delta_a)$ 上定义度量 $\omega = \rho(z)|\mathrm{d}z|$, 其中

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1(z), z \in U \backslash (\bigcup\limits_{a \in A_0} \overline{\Delta}_a), \\ \inf\limits_{a \in A_0} (\rho_1(z), M\rho_a(z)), z \in \bigcup \overline{\Delta}_a, a \in A_0. \end{cases}$$

显然, ω 在 C_+ 上有奇点,但在 $U \backslash (C_+ \cup \bigcup\limits_{a \in A_0} \partial\Delta_a)$ 上是光滑的.

引理 6.6 如果选取 M 充分大,则 P 在 $\Omega' = P^{-1}(\Omega)$ 上关于度量 ω 是严格扩张的,因此,对于任何非平凡可求长曲线 $\gamma: [0,1] \to \Omega'$, $l_\omega(P \circ \gamma) > l_\omega(\gamma)$. 这里 $l_\omega(\gamma)$ 表示 γ 在度量 ω 下的长度.

证明 对于 $a \in A_0$, $P^{-1}(\Omega \cap \overline{\Delta}_{P(a)}) = L'_a \cup L''_a$, 其中 $L'_a \subset \Omega' \cap \Delta_a$, L''_a 是 U 内的一个相对紧集且与 Δ_a 不相交. 令 $m_a = \inf\left\{\dfrac{\rho_{P(a)}(P(z))|P'(z)|}{\rho_1(z)} \middle| z \in L''_a \backslash C_+\right\}$, 由于 C_+ 是有限的,当 Δ_a 充分小时,可使 $L''_a \cap C_+ \subset P^{-1}(P(a))$, 从而易验证 $m_a > 0$, 取 $M > \max((\inf\limits_{a \in A_0} m_a)^{-1}, 1)$.

下面,我们只要证明对于 $z \in \Omega' - A_0 \cup P^{-1}(P(C_+))$ 成立着

$$\rho(P(z))|P'(z)| > \rho(z), \tag{6.5}$$

这时有下列四种情形可能发生:

(i) $\rho(z) = \rho_1(z)$, $\rho(P(z)) = \rho_1(P(z))$, 由于 $P: P^{-1}(U) \to U$ 关于 ω_1 是严格扩张的,因此(6.5)式成立;

(ii) $\rho(z) = M \cdot \rho_a(z) \leqslant \rho_1(z)$, $\rho(P(z)) = \rho_1(P(z))$, 则由(i)知

(6.5)式自然成立；

(iii) $\rho(z)=M\cdot\rho_a(z)$, $\rho(P(z))=M\cdot\rho_{P(a)}(P(z))$，则由 ω_a 的定义可知，(6.5)式成立；

(iv) $\rho(z)=\rho_1(z)$, $\rho(P(z))=M\cdot\rho_{P(a)}(P(z))$，如果 $z\in L'_a\backslash C_+$，则 $\rho_1(z)\leqslant M\cdot\rho_a(z)$，由(iii)知(6.5)式成立；若 $z\in L''_a\backslash C^+$，则由 M 的选取知(6.5)式亦成立. 证毕.

在上述度量下，任何可求长曲线 $\gamma:[0,1]\mapsto\Omega'$ 有有限的长度 ω，即 $l_\omega(\gamma)<\infty$.

考虑 orbifold 万有覆盖 $\pi:\widetilde{U}\mapsto(U,\ \upsilon)$, $\widetilde{U}=\Delta$. 由于 $\Omega'\subset U\cup A_0$, $\pi^{-1}(\Omega'\backslash A_0)\subset\widetilde{U}$，对任意 $\widetilde{\gamma}:[0,1]\mapsto\pi^{-1}(\Omega'\backslash A_0)$, $\widetilde{\gamma}(t)\mapsto\partial\widetilde{U}$ $(t\to1)$，我们有 $\pi\circ\widetilde{\gamma}(t)\to a\in A_0$，因此，$\pi$ 可连续扩充到 $\pi^{-1}(\Omega'\backslash A_0)$ 在 $\partial\widetilde{U}$ 上的边界点，从而 $\pi^{-1}(\Omega')$ 有定义且是$\overline{\widetilde{U}}$中紧集. 记 $\widetilde{\omega}$ 为 ω 在 $\pi^{-1}(\Omega')$上的提升，则在 $\pi^{-1}(U\backslash(C_+\cup(\bigcup_{a\in A_0}\Delta_a)))$上，$\widetilde{\omega}=\omega_0$ (ω_0 为 Δ 上双曲度量). 对于任何可求长曲线 $\widetilde{\gamma}:[0,\ 1]\mapsto\pi^{-1}(\Omega')$ ($\widetilde{\gamma}(0,\ 1)\subset\widetilde{U}$)，有 $l_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\gamma})<\infty$.

对于 $x,\ y\in\pi^{-1}(\Omega')$，定义距离：

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(x,\ y)=\inf\{l_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\gamma})\mid\widetilde{\gamma}:[0,\ 1]\mapsto\pi^{-1}(\Omega')\ \text{可求长},\\ \widetilde{\gamma}(0)=x,\ \widetilde{\gamma}(1)=y\},\end{aligned}$$

则显然 $(\pi^{-1}(\Omega'),\ \widetilde{d})$ 是完备的度量空间.

记 Γ 是 $\widetilde{U}=\Delta$ 内的覆盖变换群，即 $\sigma\in\Gamma\Leftrightarrow\forall\ x\in\widetilde{U}$, $\pi(\sigma(x))=\pi(x)$，则 Γ 是一个 Fuchs 群(可能有椭圆元素)，且 Γ 中元素在 $\pi^{-1}(\Omega')$上关于 $\widetilde{d}$ 是等距变换，即对 $\forall\ \sigma\in\Gamma$, $x,\ y\in\pi^{-1}(\Omega')$, $\widetilde{d}(\sigma(x),\ \sigma(y))=\widetilde{d}(x,\ y)$.

引理 6.7 如果对于非分支点 $x\in\pi^{-1}(\Omega')$, $g\cdot\sigma(x)=\delta\circ g(x)$，其中 $\sigma,\ \delta\in\Gamma$，则 $g\circ\sigma=\delta\circ g$，这里 g 为 P^{-1}在 $\widetilde{U}$上的提升.

证明 对任何非分支点 $y\in\pi^{-1}(\Omega')$，存在道路 $\gamma:[0,\ 1]\mapsto$

$\pi^{-1}(\Omega')$，连接 x 与 y，使得 $\pi\circ\gamma([0,1])=\pi\circ\sigma\circ\gamma([0,1])\subset\Omega\backslash C$. 考虑道路 $\pi\circ g\circ\gamma$ 和 $\pi\circ g\circ\sigma\circ\gamma$，则 $\pi\circ g\circ\sigma\circ\gamma(0)=\pi\circ g\circ\sigma(x)=\pi\circ\delta\circ g(x)=\pi\circ g(x)=\pi\circ g\circ\gamma(0)$，故上面两条道路有相同起点，且 $P\circ\pi\circ g\circ\gamma(t)=P\circ\pi\circ g\circ\sigma\circ\gamma(t)=\pi\circ\sigma\circ\gamma(t)=\pi\circ\gamma(t)$. 定义 $T=\{t\in[0,1]\mid g\circ\sigma\circ\gamma(t)=\delta\circ g\circ\gamma(t)\}$，则 T 是$[0,1]$中的闭集，且 $0\in T$. 另一方面，若 $t_0\in T$，由于 $\pi\circ\gamma(t)\subset\Omega\backslash C$，$P$ 在 $\pi\circ\gamma(t_0)$ 处是局部单射，则存在 t_0 的邻域 V_0，使对任意 $t\in V_0$，$\pi\circ g\circ\sigma\circ\gamma(t)=\pi\circ\delta\circ g\circ\gamma(t)$. 因此，存在 $\eta_t\in\Gamma$，使 $g\circ\sigma\circ\gamma(t)=\eta_t\circ\delta\circ g\circ\gamma(t)$，但 Γ 是离散群，故 $\eta_t\equiv\eta_{t_0}=id(t\in V_0)$，$T$ 是开集. 所以 $T=[0,1]$，即得 $g\circ\sigma(y)=\delta\circ g(y)$. 由于 $g\circ\sigma$ 与 $\delta\circ g$ 是连续映射，故 $g\circ\sigma=\delta\circ g$. 证毕.

引理 6.8 存在单调增加函数 $h:\mathscr{R}_+\mapsto\mathscr{R}_+$，满足：当 $s>0$ 时，$0<h(s)<s$；当 $s\to+\infty$ 时，$s-h(s)\to+\infty$，且对任意 x，$y\in\pi^{-1}(\Omega')$，成立

$$\widetilde{d}\,(g(x),g(y))\leqslant h(\widetilde{d}\,(x,y)).$$

证明 设 $x_0\in\widetilde{R}_0$，使 $\pi(x_0)=\gamma_0(0)\in R(P,0)\cap U$，这里 γ_0 为引理 6.4 中定义的. 设 $\widetilde{\gamma}_0$ 是以 x_0 为起点的 γ_0 的提升，$x_1=\widetilde{\gamma}_0(1)$，取 $\sigma\in\Gamma$，使 $\sigma(x_0)=x_1$，我们证明 $\{\pi\circ g\circ\sigma^j(x_0)\mid 0\leqslant j\leqslant d-1\}=P^{-1}(\pi(x_0))$：存在 $\gamma_1:[0,1]\mapsto\Omega'$，使得 $P(\gamma_1(t))=\gamma_0(dt)$，则 $P\left(\gamma_1\left(\dfrac{j}{d}t\right)\right)=\gamma_0(jt)$，那么，$P^{-1}(\pi(x_0))=\left\{\gamma_1\left(\dfrac{j}{d}\right)\middle|\,0\leqslant j\leqslant d-1\right\}$.

记 $\gamma_0^j(t)=\gamma_0(jt)$，$\widetilde{\gamma}_0^j$ 是以 x_0 为起点的 γ_0^j 的提升，则 $\widetilde{\gamma}_0^j$ 是连接 x_0 与 $\sigma^j(x_0)$的道路，$\widetilde{\gamma}^j(1)=\sigma^j(x_0)$. 由于 $P\circ\pi\circ g\circ\widetilde{\gamma}_0^j(t)=\pi\circ\widetilde{\gamma}_0^j(t)=\gamma_0(jt)$，$\pi\circ g\circ\widetilde{\gamma}_0^j(0)=\gamma_0(0)$，所以 $\pi\circ g\circ\widetilde{\gamma}^j(t)=\gamma_1\left(\dfrac{j}{d}t\right)$，$\gamma_1\left(\dfrac{j}{d}\right)=\pi\circ g\circ\widetilde{\gamma}^j(1)=\pi\circ g\circ\sigma^j(x_0)$. 对任意非分支点 $x\in\pi^{-1}(\Omega')$ 作连接 x 与 x_0 的道路 γ'，使得 $\gamma'([0,1])\subset\pi^{-1}(\Omega'\backslash C)$，则 $\gamma'^{-1}\circ\gamma_0\circ\gamma'$ 代替上面的 γ_0 可得 $P^{-1}(\pi(x))=\{\pi\circ g\circ\sigma^j(x)\mid 0\leqslant j\leqslant d-1\}$.

现取 F 是 $\pi^{-1}(\Omega')$ 中的紧集，使得 $\Gamma\cdot F=\bigcup\limits_{\delta\in\Gamma}\delta(F)=\pi^{-1}(\Omega')$，记

$F_1 = \bigcup_{0 \leqslant j \leqslant d-1} \sigma^j F$ 也是 $\pi^{-1}(\Omega')$ 中的紧集，定义函数

$$h(s) = \sup\{\widetilde{d}\,(g(x),\, g(y))\,|\, x,\, y \in \pi^{-1}(\Omega'),\, \widetilde{d}\,(x,\, y) \leqslant s\},$$

易验证，$h(s)$是单调增加的右连续函数.

对于非分支点 $x \in F$ 及 $\delta \in \Gamma$，由于 $\pi \circ g \circ \delta(x) \in P^{-1}(\pi(x))$，故存在 $j = j(\delta)$，使得 $\pi \circ g \circ \delta(x) = \pi \circ g \circ \sigma^j(x)$. 因此 $g \circ \delta(x) = \eta \circ g \circ \sigma^j(x)$，$\eta = \eta(\delta) \in \Gamma$. 由引理 6.7，$g \circ \delta = \eta \circ g \circ \delta^j$，于是 $\widetilde{d}\,(g \circ \delta(x),\, g \circ \delta(y)) = \widetilde{d}\,(g \circ \sigma^j(x),\, g \circ \sigma^j(y))$. 由于 g 是连续函数，则得

$$h(s) = \sup\{\widetilde{d}\,(g(x),\, g(y))\,|\, x \in F,\, \widetilde{d}\,(x,\, y) \leqslant s\}.$$

又因 g 关于 $\widetilde{d}$ 是严格收缩的，所以 $h(s) < s$.

设 s_1 和 s_2 是任意两个正数，对任何 $x,\, y \in \pi^{-1}(\Omega')$，满足 $\widetilde{d}\,(x,\, y) \leqslant s_1 + s_2$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\pi^{-1}(\Omega')$ 中连接 x 和 y 的道路 $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$，使得 $l_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\gamma}_\varepsilon) \leqslant s_1 + s_2 + \varepsilon$，取 $x' \in \gamma_\varepsilon$，使 $\widetilde{d}\,(x,\, x') \leqslant s_1 + \frac{\varepsilon}{2}$，$\widetilde{d}\,(x',\, y) \leqslant s_1 + \varepsilon/2$，则得 $\widetilde{d}\,(g(x),\, g(y)) \leqslant \widetilde{d}\,(g(x),\, g(x')) + \widetilde{d}\,(g(x'),\, g(y)) \leqslant h(s_1 + \varepsilon/2) + h(s_2 + \varepsilon/2)$. 由于 $h(s)$是右连续的，故 $h(s_1 + s_2) \leqslant h(s_1) + h(s_2)$，因此 $s - h(s)$单调增加，且对于任何 $s > 0$ 和整数 k，$h(ks) \leqslant kh(s)$，所以 $s - h(s) \to +\infty\,(s \to +\infty)$. 证毕.

定理 6.6 设 $P(z)$是几何有限多项式，$\deg P \geqslant 2$，如果其 Julia 集 $J(P)$是连通的，则 $J(P)$是局部连通的.

证明 取 γ_0 如前，$\gamma_0([0,\, 1]) \subset \Omega'$ 是等势曲线，$\gamma_0(0) \in R(P,\, 0)$，由引理 6.4，存在 γ_n，满足 $P(\gamma_{n+1}(t)) = \gamma_n(dt)$，$\gamma_n(0) = \gamma_n(1) \in R(P,\, 0)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，我们要证明$\{\gamma_n\}$一致收敛. 设 $\widetilde{\gamma}_n$ 是 γ_n 在 $\pi^{-1}(\Omega')$内的提升，使得 $\widetilde{\gamma}_n(0) \in \widetilde{R}_0$，且如果 $dt = j + s$，则 $\widetilde{\gamma}_{n+1}(t) = g(\sigma^j \circ \widetilde{\gamma}_n(s))\,(0 \leqslant s < 1)$.

对任两条道路 $\widetilde{\gamma},\, \widetilde{\eta}\, : [0,\, 1] \mapsto \pi^{-1}(\Omega')$，定义距离 $d(\widetilde{\gamma},\, \widetilde{\eta}) =$

$\sup_{t\in[0,1]} \widetilde{d}(\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{\eta}(t))$，那么，当 $m, n \geqslant 1$，由引理 6.8，则有 $d(\widetilde{\gamma}_n, \widetilde{\gamma}_m) \leqslant h(d(\widetilde{\gamma}_{n-1}, \widetilde{\gamma}_{m-1}))$.

记 $l = d(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1)$，取 $L \geqslant l$，使 $L - h(L) \geqslant l$，则由归纳可得，对任意 n 成立 $d(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_n) \leqslant L$.

现对任意 $m, n, m = n + k$，有 $d(\widetilde{\gamma}_n, \widetilde{\gamma}_m) \leqslant h^n(d(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_k)) \leqslant h^n(L)$，而 $\{h^n(L)\}$ 是严格单调下降序列，收敛于 h 的唯一不动点 O，故 $\{\widetilde{\gamma}_n\}$ 是度量 $\widetilde{d}$ 下的一致 Cauchy 序列，其投影 $\{\gamma_n\}$ 是在度量 d_ω 下的一致 Cauchy 序列. 又 d_ω 定义的拓扑与欧氏度量定义的拓扑是相同的，故 $\{\gamma_n\}$ 一致收敛. 由引理 6.4，$J(P) = \partial K(P)$ 是局部连通的. 证毕.

当 $K(P)$ 不连通时，可以考虑 $K(P)$ 的每个连通分支的局部连通性. 更一般地，对于几何有限的有理函数，McMullen（见文献[MC]）提出了下面的问题.

猜想 6.1 对于几何有限有理函数，其 Julia 集的每个连通分支都是局部连通的.

最近，谭蕾和尹永成（见文献[TY]）证明了几何有限有理函数的Julia 集的每个最终周期分支是局部连通的. 而 Julia 集的游荡分支的局部连通性仍然是一个未解决问题.

§6.4 二次多项式与 Mandelbrot 集

本节考虑一个特殊的多项式族：二次多项式族. 在仿射共轭下，二次多项式有下面的规范形式：

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

这是一个单参数族，P_c 有唯一的有限临界点 0，c 即是临界值. 此时，定理 6.3 的条件是充分必要的，我们可以改述如下.

定理 6.7

1）如果 $0 \in K(P_c)$，则 $J(P_c)$ 是连通的；

2) 如果 $0 \notin K(P_c)$，则 $J(P_c) = K(P_c)$ 是一个 Cantor 集.

定义 6.6 称集合

$$M = \{c \in \mathscr{C} \mid J(P_c) \text{ 是连通的}\}$$

$$= \{c \in \mathscr{C} \mid P_c^n(0) \nrightarrow \infty\}$$

为 Mandelbrot 集.

Mandelbrot 在他的分形几何中作为一个典型的分形集介绍了 Mandelbrot 集，并揭示了 M 有极其复杂和奇妙的结构（图 6.4）. 容易给出 M 的一些基本描述，如 M 是关于实轴对称的闭集，包含在 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 内，且 $M \cap \mathscr{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$. 在 Mandelbrot 最初给出的 Mandelbrot 集的计算机图像中看出，M 似乎由一些"孤岛"组成，但 A. Douady 和 J. H. Hubbard 给出了 M 的一个相反的描述.

现在记 $J_c = J(P_c)$，$K_c = K(P_c)$，$\varphi_c = \varphi_{P_c}$，$h_c = h_{P_c}$. 当 $c \in M$ 时，$0 \in K_c$，$\varphi_c(z)$ 可以共形延拓到 $\mathscr{C} \setminus K_c$；而当 $c \in \mathscr{C} \setminus M$ 时，$0 \notin K_c$，故 $\varphi_c(z)$ 可共形延拓到 $\{z \in \mathscr{C} \mid h_c(z) > h_c(0)\}$，因此，$\varphi_c(c)$ 有定义，$|\varphi_c(c)| > 1$.

定义映射 $\Phi: \mathscr{C} \setminus M \mapsto \mathscr{C} \setminus \overline{\Delta}$，$\Phi(c) = \varphi_c(c)$.

定理 6.8 $\Phi: \mathscr{C} \setminus M \mapsto \mathscr{C} \setminus \overline{\Delta}$ 是 Riemann 映射（共形映射）.

证明 首先证明 Φ 在 $\mathscr{C} \setminus M$ 上解析. 记 $\varphi(c, z) = \varphi_c(z)$，定义在 $\{(c, z) \in (\mathscr{C} \setminus M) \times \mathscr{C} \mid h_c(z) > h_c(0)\}$ 上，当 z 充分大时，

$$\varphi(c, z) = \varphi_c(z) = z \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(P_c^{n+1}(z))^{\frac{1}{2^{n+1}}}}{(P_c^n(z))^{\frac{1}{2^n}}}$$

$$= z \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{(P_c^n(z))^2}\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}. \quad (6.6)$$

任取 $c_0 \in \mathscr{C} \setminus M$，取定 $R > 1 + |c_0|$，则当 $|z| > R$ 时，$|P_{c_0}(z)| > |z|$. 取 c_0 的邻域 U'，使得当 $c \in U'$ 时，$1 + |c| < R$，则当 $|z| > R$ 时，仍有 $|P_c(z)| > |z| > R$，于是，当 $(c, z) \in U' \times (\mathscr{C} \setminus \overline{\Delta}_R)$ 时，

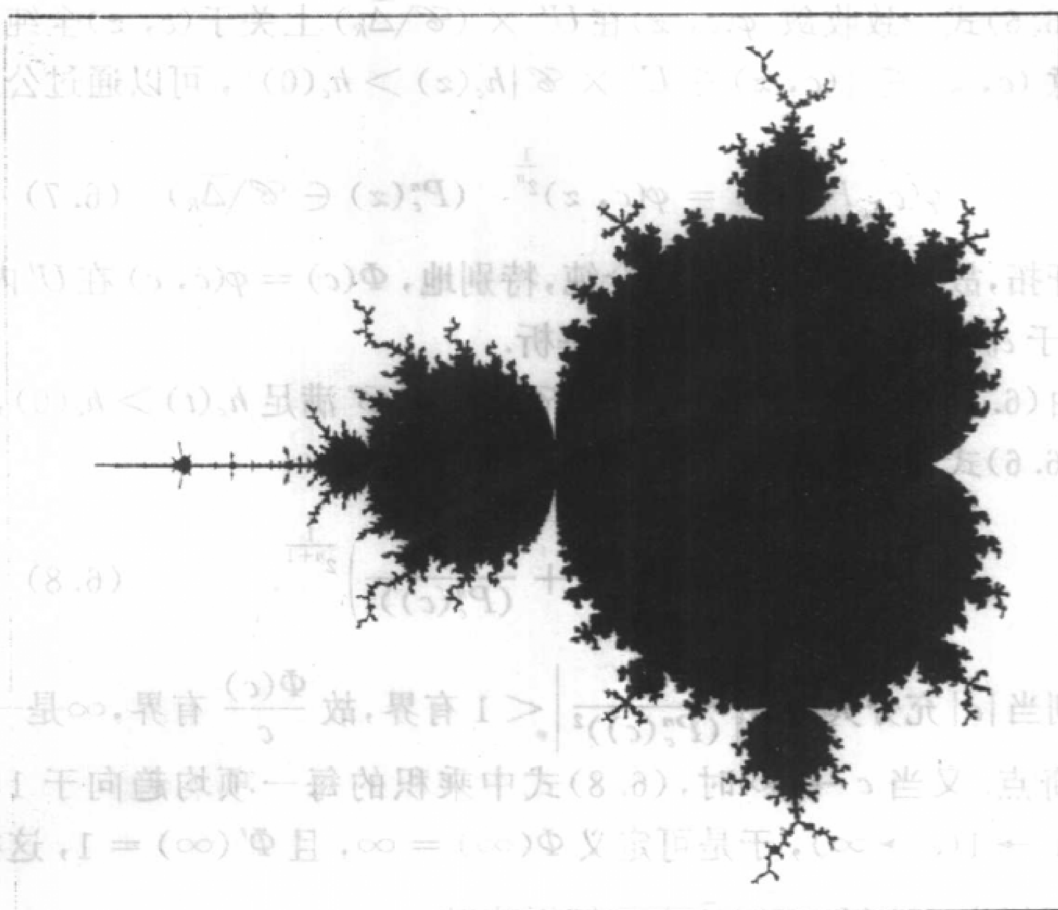


图 6.4 Mandelbrot 集及其 Riemann 映射 Φ

（带有等势曲线和外射线）

$$\left|\frac{c}{(P_c^n(z))^2}\right| < \frac{R-1}{R^2} < 1,$$

因此(6.6)式一致收敛. $\varphi(c, z)$在 $U' \times (\mathscr{C}\backslash\overline{\Delta}_R)$ 上关于(c, z)全纯，对于任意 $(c, z) \in \{(c, z) \in U' \times \mathscr{C} | h_c(z) > h_c(0)\}$，可以通过公式：

$$\varphi(c, P_c^n(z)) = \varphi(c, z)^{\frac{1}{2^n}} \quad (P_c^n(z) \in \mathscr{C}\backslash\overline{\Delta}_R) \quad (6.7)$$

解析开拓，故 $\varphi(c, z)$也为二元全纯，特别地，$\Phi(c) = \varphi(c, c)$ 在U'内解析. 由于 c_0 任取，故 Φ 在$\mathscr{C}\backslash M$ 上解析.

由(6.7)式，对任意 $(c, z) \in (\mathscr{C}\backslash M) \times \mathscr{C}$ 满足 $h_c(t) > h_c(0)$，仍成立(6.6)式，特别地，

$$\Phi(c) = c\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{c}{(P_c^n(c))^2}\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}. \qquad (6.8)$$

注意到当$|c|$充分大时，$\left|\frac{c}{(P_c^n(c))^2}\right| < 1$ 有界，故 $\frac{\Phi(c)}{c}$ 有界，∞是一个可去奇点. 又当 $c \to \infty$ 时，(6.8)式中乘积的每一项均趋向于 1，故 $\Phi(c)/c \to 1(c \to \infty)$，于是可定义 $\Phi(\infty) = \infty$，且 $\Phi'(\infty) = 1$，这样，将 Φ 延拓为 $\hat{\mathscr{C}}\backslash M \mapsto \hat{\mathscr{C}}\backslash\overline{\Delta}$ 上的解析映射.

其次，要证明 Φ 是到上且逆紧的. 类似地，$h_c(z)$关于 c 与 z 连续，而 $M = \{c | h_c(c) = 2h_c(0) = 0\}$ 是闭集，当 $c \to \partial M$ 时，$h_c(c) \to 0$，即 $|\Phi(c)| \to 1$，这样就得到 Φ 是到上的，并且，类似于引理 2.2 的证明，Φ 是逆紧的，因此 Φ : $\hat{\mathscr{C}}\backslash M \mapsto \hat{\mathscr{C}}\backslash\overline{\Delta}$ 是分支覆盖. 最后，证明 $\deg\Phi = 1$. 这由 $\Phi^{-1}(\infty) = \infty$，$\Phi'(\infty) = 1$ 即得，因此，Φ 是共形映射. 证毕.

推论 6.1 Mandelbrot 集 M 是单连通的.

记 $H(M) = \{c \in M | P_c$ 有一个(有限的)吸引或超吸引周期轨道$\}$，由于每个吸引(或超吸引)周期轨道吸引一个临界点，而 P_c 仅有一个有限临界点 0，故 $c \in H(M)$ 蕴含了 P_c 是双曲的. 反之，若 $c \in M$，且 P_c 是双曲的，则临界点 0 的轨道必收敛于某个吸引(超吸引)周期轨道，故 $c \in H(M)$. 由隐函数定理可知 $H(M)$是开集，$H(M)$的每个分支称为 M 的双曲分支.

设 W 是 M 的一个双曲分支，对任意 $c \in W$，P_c 有一个 k 阶吸引(超吸引)周期轨道 $\{\alpha(c), \cdots, P_c^{k-1}(\alpha(c))\}$，$\alpha$ 是 c 的解析函数，定义

映射 $\rho_W: W \mapsto \Delta$ 为

$$\rho_W(c) = (P_c^k)'(\alpha(c)).$$

定理 6.9 对于 M 的每个双曲分支 W，$\rho_W: W \mapsto \Delta$ 是共形映射，因而，W 是单连通的.

证明 对于任何 $\mu \in \Delta$，记 $q_\mu(z) = z \cdot \dfrac{z+\mu}{1+\bar{\mu}z}$，$q_\mu$ 是 Δ 到 Δ 的 Blaschk 乘积，满足 $q_\mu(0)=0$，$q_\mu'(0)=\mu$，$\deg q_\mu = 2$.

设 $c \in W$，$\mu_0 = \rho_W(c)$，令 U 是 $\dot{K}_c$ 的含有临界点 0 的分支，则存在共形映射 $\varphi: U \mapsto \Delta$，使得 $\varphi \circ P_c^k \circ \varphi^{-1} = q_{\mu_0}$. 事实上，$P_c^k: U \mapsto U$ 是度为 2 的映射，有不动点 $\alpha(c)$，因此，取 φ 为 U 到 Δ 的共形映射，将 $\alpha(c)$映成 0，再复合一个 Δ 上的旋转即可. 设 $|\mu_0| < \gamma < 1$，令 $B = \overline{\Delta}_\gamma$，$A_\mu = q_\mu^{-1}(B)$，那么，对于 $|\mu| < \gamma$，容易验证 $B \subset \dot{A}_\mu$ 且 B 包含 q_μ 的临界值. 由 Riemann-Hurwitz 公式可知 A_μ 是单连通的.

记 $E = \varphi^{-1}(A_{\mu_0})$，对每个 $\mu \in \Delta_r$，容易构造拟共形映射 $\psi_\mu: E \to A_\mu$，使得在 E 的边界上成立 $\psi_\mu \circ P_c^R = q_\mu \circ \psi_\mu$，且 $\psi_{\mu_0} = \varphi$，ψ_μ 连续依赖于 μ.

定义 $g_\mu: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 如下：在 $\hat{\mathscr{C}} \backslash E$ 上 $g_\mu = P_c$，而在 E 上满足 $g_\mu^k = \psi_\mu^{-1} \circ q_\mu \circ \psi_\mu$. 现在在 E 上定义复结构 $\sigma_\mu = \psi_\mu^* \sigma_0$，这里 σ_0 是 A_μ 上的标准复结构. 将 σ_μ 延拓到 $\dot{K}_c = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_c^{-n}(E)$，使得 $g_\mu^* \sigma_\mu = \sigma_\mu$，而在 $\hat{\mathscr{C}} \backslash \dot{K}_c$ 上定义 $\sigma_\mu = \sigma_0$，这样仍有 $g_\mu^* \sigma_\mu = \sigma_\mu$. 由可测 Riemann 映射定理，存在唯一的拟共形映射 Φ_μ，使得 $\Phi_\mu^* \sigma_0 = \sigma_\mu$，而且 $\Phi_\mu \circ g_\mu \circ \Phi_\mu^{-1}(z)$ 具有形式 $z^2 + c(\mu)$，$c(\mu)$ 关于 μ 是连续的，$c(\mu_0) = c$，且对于 $\mu \in \Delta_r$，$c(\mu) \in W$，满足 $\rho_W(c(\mu)) = \mu$，因此 $\mu \mapsto c(\mu)$ 是 Δ_r 上的 ρ_W 的某个逆分支. 令 $r \to 1$，$\rho_W: W \mapsto \Delta$ 是覆盖映射，但由于 Δ 是单连通的，故 ρ_W 是 W 到 Δ 上的共形映射. 证毕.

定义 6.7 对于 M 的每个双曲分支 W，分别称 $\rho_W^{-1}(0)$和 $\rho_W^{-1}(1)$为 W 的中心和根，又若 0 是 P_c 的严格最终周期点，则称 c 为 Misiurewicz 点.

定理 6.10

1）M 的边界 ∂M 包含在 Misiurewicz 点集的闭包内；

2）∂M 包含在双曲分支的中心点集的闭包内.

证明 当 $c \in \mathscr{C} \backslash M$ 时，$P_c^n(c) \to \infty$；当 $c \in M$ 时，$|P_c^n(c)|$ 有界，因此，对任何 $c_0 \in \partial M$ 及其邻域 U，$\{P_c^n(c)\}$ 在 U 内不正规.

1）若结论不成立，则存在 $c_0 \in \partial M\left(c_0 \neq \frac{1}{4}\right)$ 及充分小单连通邻域 U，使得 $\frac{1}{4} \notin U$，且 U 不含有 Misiurewicz 点. 在 U 内定义 $\left(\frac{1}{4} - c\right)^{\frac{1}{2}}$ 的两个单值分支，分别记为 $g_1(c)$ 和 $g_2(c)$. 记 $h_1(c) = \frac{1}{2} + g_1(c)$，$h_2(c) = \frac{1}{2} + g_2(c)$，$h_3(c) = -\left(\frac{1}{2} + g_2(c)\right)$，则在 U 上，$P_c^n(c) \neq h_1(c)$，$h_2(c)$，$h_3(c)$，令

$$H_n(c) = \frac{P_c^n(c) - h_1(c)}{P_c^n(c) - h_3(c)} \cdot \frac{h_2(c) - h_3(c)}{h_2(c) - h_1(c)},$$

则 $H_n(c) \neq 0, 1, \infty$，由 Montel 定理可知，$\{H_n\}$ 在 U 上正规，因此 $\{P_c^n(c)\}$ 在 U 内正规，这是矛盾的，故 1)是真实的.

2）若结论不成立，则存在 $c_0 \in \partial M$ 及其充分小单连通邻域 U，使 $0 \notin U$，记 $\sqrt{-c}$ 在 U 内的两个单值分支为 $g_1(c)$ 和 $g_2(c)$，则 $P_c^n(c) \neq 0$，$g_1(c)$，$g_2(c)$，同样得到 $\{P_c^n(c)\}$ 在 U 内正规. 这是矛盾的.

证毕.

定义 6.8 对 $\theta \in \mathscr{R}/\mathscr{Z}$，曲线 $R(M, \theta) = \{c \in \mathscr{C} \backslash M \mid \arg\Phi(c) = 2\pi\theta\}$ 称为 M 的外射线，而 $\{c \in \mathscr{C} \backslash M \mid |\Phi(c)| = r > 1\}$ 称为等势曲线（见图 6.3）.

引理 6.9 设 $\theta \in \mathscr{Q}/\mathscr{Z}$ 是有理数，c_0 是 $R(M, \theta)$ 在 ∂M 上的一个聚点，则 P_{c_0} 有一个有理中性周期点或 c_0 是 Misiurewicz 点.

证明 设 $\theta = \frac{p}{2^l(2^k - 1)}$，$l$ 与 k 取尽可能小，$\theta' = 2^l\theta$，则 $R(P_{c_0}, \theta)$ 在某个最终周期点 α_0 处可达，$R(P_{c_0}, \theta')$ 在周期点 $\alpha'_0 = P_{c_0}^l(\alpha_0)$ 处可达，α_0' 是有理中性或排斥周期点. 如果 α_0' 是有理中性的，则满足引理要

求. 下面假设 α'_0 是排斥周期点. 由隐函数定理, 存在 c_0 的邻域 $N \subset \mathscr{C}$, 及 N 上的解析函数 $\alpha'(c)$, 满足 $\alpha'(c_0)=\alpha'_0$, 且 $P_c^k(\alpha'(c)) = \alpha'(c)$, $\alpha'(c)$是 P_c 的排斥周期点. 这时, 存在 $\alpha'(c)$的局部线性化邻域 U_c 及 U_c 上共形共轭 ζ_c, 使得 $\zeta_c \circ P_c^k \circ \zeta_c^{-1}(z) = \rho_c \cdot z$, 这里 $|\rho_c| > 1$ 是 $\alpha'(c)$的乘子. 当 N 充分小时, ζ_c 与 ρ_c 解析依赖于参数 c, 且局部线性化邻域可取公共的邻域 $U_c = U$.

考虑外射线 $R(P_c, \theta')$, $c \in N$, 在 $\{z | h_c(z) > h_c(0)\}$ 内, $R(P_c, \theta')$可表示为 $R(P_c, \theta') = \varphi_c^{-1}(e^{s+2\pi i\theta'})$, $s > h_c(0)$, 定义 $\psi_{c,\theta}$: $[h_c(0), +\infty) \to R(P_c, \theta')$, $\psi_{c,\theta'(s)} = \varphi_c^{-1}(\mathrm{e}^{s+2\pi i\theta})(s \geqslant h_c(0)$, 在 $h_c(0)$处取极限). 下面扩充 $\psi_{c,\theta'}$. 由于 $P_c^k(R(P_c, \theta')) = R(P_c, \theta')$, 则可以通过 $\psi_{c,\theta'}(s) = P_c^{-nk} \circ \psi_{c,\theta'}(d^{nk}s)$ 将 $\psi_{c,\theta'}$扩充到 $\left[\frac{1}{d^{nk}}h_c(0), +\infty\right) \mapsto R(P_c, \theta')$, 其中 P_c^{-nk} 取满足 $P_c^{-nk}(R(P_c, \theta')) = R(P_c, \theta')$ 的分支, 于是存在适当的 n_0, 使得当 N 充分小时, $\psi_{c,\theta'}\left(\frac{1}{d^{n_0k}}h_c(0)\right) \in U$, $c \in N$. 这样, $\psi_{c,\theta'}$可通过 $\psi_{c,\theta'}\left(\frac{s}{2^n}\right) = \zeta_c^{-1}\left(\frac{\zeta_c(\psi_{c,\theta'})(s)}{\rho_c^n}\right)$ 扩充到 $\mathscr{R}^+$ 上, 且 $\psi_{c,\theta'}(0) = \lim\limits_{s\to 0}\psi_{c,\theta'}(s) = \zeta_c^{-1}(0) = \alpha'(c)$. 该收敛关于 $c \in N$ 是一致的. 因此, $\psi_{c,\theta'}$: $\mathscr{R}^+ \cup \{0\} \mapsto \mathscr{C}$ 对固定的 c 是连续的, 而关于 $c \in N$ 是解析的.

设 $\{C_n\}_{n\geqslant 1} \subset R(M, \theta)$, 且 $C_n \to C_0(n \to \infty)$, 则 $s_n = h_{c_n}(c_n) \to 0(n \to \infty)$, $\psi_{c_n,\theta'}(2^l s_n) = \psi_{c_n,\theta'}(h_{c_n}(P_{c_n}^l(c_n)) = \varphi_{c_n}^{-1}(\mathrm{e}^{2\pi i\theta'}|\varphi_{c_n}(P_{c_n}^l(c_n))|) = \varphi_{c_n}^{-1}(\varphi_{c_n}(P_{c_n}^l(c_n))) = P_{c_n}^l(c_n)$. 令 $n \to \infty$, 得到 $P_{c_0}^l(c_0) = \psi_{c_0,\theta'}(0) = \alpha'(c_0) = \alpha'_0$. 因为 $\alpha'_0 \in \partial K_{c_0}$ 是排斥周期点, 所以 c_0 是 Misiurewicz 点. 证毕.

定理 6.11 设 $\theta \in \mathscr{Q}/\mathscr{Z}$ 是有理数, 则外射线 $R(M, \theta)$在 $c \in \partial M$ 处可达, 且 c 是 Misiurewicz 点或是某双曲分支的根.

证明 $R(M, \theta)$的聚点集是连通的紧集, 由引理 6.9 可知它包含在 Misiurewicz 点与使 P_c 具有有理中性周期轨道的 c 的并集内. 而 Misiurewicz 点是方程 $P_c^{n+l}(c) = P_c^n(c)(l > 0, n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的解, P_c 有有理中性周期轨道的 c 是方程组 $P_c^n(z) = z$, $(P_c^n)'(z) = 1(n =$

1, 2, …) 的解，它们都是可列集，所以，$R(M, \theta)$的聚点集只能是单点$\{c\}$，且 c 或者是 Misiurewicz 点或者 P_c 有有理中性周期轨道，后者必为某个双曲分支的根. 证毕.

Mandelbrot 集的边界是一个十分复杂的集合，为一分形. 事实上，M. Shishikura[Shi]证明了 ∂M 的 Hausdorff 维数等于 2，回答了 Mandelbrot 提出的一个问题. 另外，∂M 也等于使 P_c J-不稳定的参数集合，P_c 结构不稳定的参数集合等于 ∂M 与双曲分支的中心的并集. 关于 Mandelbrot 集还有许多深刻的结果不能一一介绍，也有许多著名的猜想和问题有待解决，我们列出几个主要的如下.

猜想 6.2 ∂M 是局部连通的.

猜想 6.3 $H(M) = \dot{M}$.

问题 6.1 ∂M 是否有正的平面 Lebesgne 测度？

目前，猜想 6.2 已有很大进展：除了 ∂M 上的可列个点外，∂M 的任一点都有局部连通的拓扑基，但这可列个点是否有局部连通的拓扑基仍不清楚，且它们在 ∂M 上是稠密的. 猜想 6.3 是双曲性猜想的特殊情形，目前已证明：$H(M) \cap \mathscr{R}$ 在$\left[-2, \frac{1}{4}\right]$中是稠密的.

§6.5 填充 Julia 集对参数的连续依赖性

当 $c \in \dot{M}$ 时(即为 J-稳定)，$J(P_c)$是连续依赖于参数 c 的，但当 $c \in \partial M$ 时，$J(P_c)$一般失去对参数的连续依赖性，而从计算机图像上观察到，$K(P_c)$似乎在某种意义上随参数 c 连续变动，本节讨论这个问题，我们回到多项式空间 Poly_d.

定义 6.9 记 $\mathscr{F}$ 为$\mathscr{C}$的非空紧子集全体，对于 $A, B \in \mathscr{F}$，定义 A 和 B 的 Hausdorff 距离为

$$d_H(A, B) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in B}}(d(x, B), d(A, y)),$$

这里 $d(\cdot, \cdot)$是$\mathscr{C}$上的 Euclid 距离.

$d_H(A, B) < \varepsilon$ 等价于 A 包含在 B 的 ε-邻域内而 B 包含在 A 的 ε-

邻域内，用 $N_\varepsilon(A)=\{x\in\mathscr{C}\mid d(x,A)<\varepsilon\}$ 表示 A 的 ε-邻域，$d_H(A,B)=0$ 意味着 $A=B$. 易验证，$(\mathscr{F},d_H)$是完备的度量空间，并且是列紧的拓扑空间(任何有界子族 $\mathscr{E}\subset\mathscr{F}$ 必有收敛的子序列).

对 Poly_d 用多项式系数参数化，则对 $P(z)=z^d+a_1z^{d-1}+\cdots+a_d$ 和 $Q(z)=z^d+b_1z^{d-1}+\cdots+b_d\in\mathrm{Poly}_d$，由系数定义的距离 $\|P-Q\|=\sum_{i=1}^{d}|a_i-b_i|$ 所诱导的拓扑等价于 Poly_d 的紧开拓扑(一致收敛拓扑). 将 $J(P)$与 $K(P)$视作 Poly_d 到 $\mathscr{F}$ 的映射，即

$$J: P\in\mathrm{Poly}_d\to J(P)\in\mathscr{F},$$

$$K: P\in\mathrm{Poly}_d\to K(P)\in\mathscr{F},$$

我们考虑 J 和 K 的连续性.

设 $P_0\in\mathrm{Poly}_d$ 有吸引或超吸引循环 $\{U,P_0(U),\cdots,P_0^{k-1}(U)\}$，$z_0\in U$ 是周期为 k 的吸引周期点，由隐函数定理，存在 P_0 的邻域 $W\subset\mathrm{Poly}_d$，使得对任何 $P\in W$ 都有吸引循环 $\{U_P,P(U_P),\cdots,P^{k-1}(U_P)\}$ 及周期为 k 的吸引周期点 $z_P\in U_P$，且当 $P\to P_0$ 时，$z_P\to z_0$.

引理 6.10 设 $P_0\in\mathrm{Poly}_d$ 有吸引或超吸引循环 $\{U,P_0(U),\cdots,P_0^{k-1}(U)\}$，则对 U 内任何紧子集 K_0，存在 P_0 的邻域 $W_0\subset W$，使 $P\in W_0$ 时，$K_0\subset U_P$.

证明 对于 U 内任何紧子集 K_0，存在相对紧的开子集 $V\subset U$，使得 $K_0\subset V$ 且 $\overline{P_0^k(V)}\subset V$，$d_0=\min\limits_{x\in\partial V}d(x,P_0^k(V))>0$. 取 P_0 的邻域 $W_0\subset W$，使得当 $P\in W_0$ 时，$\sup\limits_{z\in\overline{V}}d(P^k(z),P_0^k(z))\leqslant\frac{d_0}{2}$，则 $\overline{P^k(V)}\subset V$. 由 Montel 定理，$V\subset U_P$，因此当 $P\in W_0$ 时，$K_0\subset U_P$. 证毕.

由于 $\mathscr{C}\backslash K(P)$ 是 P 的超吸引不变稳定域，因此有以下推论.

推论 6.2 设 $P_0\in\mathrm{Poly}_d$，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 P_0 的邻域 W_0，使得当 $P\in W_0$ 时，$K(P)\subset N_\varepsilon(K(P_0))$.

引理 6.11 设 $P_0\in\mathrm{Poly}_d$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 P_0 的邻域 W_0，使得对任意 $P\in W_0$，$J(P_0)\subset N_\varepsilon(J(P))$.

证明 任取 $J(P_0)$上的一个排斥周期点 z 及其$\frac{\varepsilon}{2}$-邻域 U_z，由隐函数定理，则存在 P_0 的邻域 W_z，使得对任意 $P \in W_z$，有排斥周期点 z_P，$z_P \to z(P \to P_0)$. 取 W_z 充分小，则有 $z_P \in U_z$，因此，$J(P) \cap U_z \neq \varnothing$. 由于排斥周期点在 $J(P_0)$上稠密，故 $\{U_z | z$ 为 P_0 的排斥周期点$\}$成为 $J(P_0)$的开覆盖，存在有限多个排斥周期点 $z_1, \cdots, z_n$，使 $\bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i} \supset J(P_0)$，令 $W_0 = \bigcap_{i=1}^{n} W_{z_i}$，则当 $P \in W_0$ 时，$J(P) \cap U_{z_i} \neq \varnothing$，这意味着 $N_\varepsilon(J(P)) \supset \bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i} \supset J(P_0)$. 证毕.

定理 6.12 设 $P_0 \in \mathrm{Poly}_d$，则 $J(P)$在 P_0 处连续的充要条件是 P_0 没有抛物循环和 Siegel 循环.

证明 充分性：根据引理 6.11，已知对任意 $\varepsilon > 0$，当 P 充分接近 P_0 时，$J(P_0) \subset N_\varepsilon(J(P))$，我们要证 $J(P) \subset N_\varepsilon(J(P_0))$. 若 P_0 没有抛物循环和 Siegel 循环，则 P_0 仅有吸引和超吸引循环. 考虑 $\mathscr{C} \backslash N_\varepsilon(J(P_0))$，它只能包含在 $F(P_0)$的有限多个分支内，而这些分支是 P_0 的吸引(超吸引)循环或它们在有限逆迭代像内，由引理 6.10 可知，当 P 充分接近 P_0 时，$\mathscr{C} \backslash N_\varepsilon(J(P_0))$ 的每个分支包含在$\mathscr{C} \backslash K(P)$ 或 $\mathring{K}(P)$的分支内，这说明了 $N_\varepsilon(J(P_0)) \supset J(P)$.

必要性：我们要证明当 P_0 有 Siegel 循环或抛物循环时，$J(P)$在 P_0 不连续. 若 P_0 有 Siegel 循环 $\{U, P_0(U), \cdots, P_0^{k-1}(U)\}$，$z_0 \in U$ 是 Siegel 点，则 $(P_0^k)'(z_0) = \mathrm{e}^{2\pi i\theta}$，$\theta$ 为无理数. 由隐函数定理，存在 P_0 的邻域 W_0，使当 $P \in W_0$ 时，存在 z_P 全纯依赖于 P，$z_{P_0} = z_0$ 且 $P^k(z_P) = z_P$，从而 $\lambda(P) = (P^k)'(z_P)$ 是 W_0 上的全纯函数，在第五章中已证明 $\lambda(p)$不为常数，因此，存在 $P_i \in W_0$，$P_i \to P_0$，$|\lambda(P_i)| > 1$. 这样，$z_{P_i} \in J(P_i)$，但 $z_{P_i} \to z_0 \in U$，故 $J(P)$在 P_0 处不连续.

如果 P_0 有抛物循环 $\{U, P_0(U), \cdots, P_0^{k-1}(U)\}$，$z_0 \in \partial U$ 是有理中性周期点，不妨设 $k = 1$，则 $P_0(z_0) = z_0$ 且 $P_0'(z_0) = 1$，U 内至少含有 P_0 的一个临界点 c_0，记 $N = \{P \in \mathrm{Poly}_d | P'(c_0) = 0\}$，$\Sigma = \{P \in N | P$ 在 N 中是 J-稳定的$\}$，则 Σ 是 N 中稠密开子集，$P_0 \in \Lambda = N \backslash \Sigma$，

而 Λ 是一个完全集. 又记 $\Lambda_0 = \{P \in N \mid$ 存在 $n \geqslant 1$,使 $P^n(c_0)$ 是 P 的排斥周期点$\}$,则 Λ_0 是 Λ 的稠密子集[Lyu]. 所以,存在 $\{P_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Lambda_0$, 使 $P_i \to P_0(i \to \infty)$. 由于 $c_0 \in J(P_i)$,而 $c_0 \notin J(P_0)$, 故$J(P)$在 P_0 处不连续. 证毕.

下面讨论 $K(P)$的连续性.

引理 6.12 如果 $P_0 \in \mathrm{Poly}_d$ 有 Siegel 循环 $\{U, P_0(U), \cdots, P_0^{k-1}(U)\}$, 则对 U 内任何一点 z 及 z 的任何邻域 $V \subset U$, 存在 P_0 的邻域 W_0,使当 $P \in W_0$ 时, $K(P) \cap V \neq \varnothing$.

证明 如若不然,存在 $\zeta_0 \in U$ 及其邻域 $V_0 \subset U$ 和序列 $\{P_i\}(i \geqslant 1)$ 使得 $P_i \to P_0$ 且 $K(P_i) \cap V_0 = \varnothing$.

对任意 $\zeta \in U$, 记 $\Gamma_\zeta = \overline{\{P_0^{kn}(\zeta)\}_{n \geqslant 1}}$, Γ_ζ 是过 ζ 的 Jordan 曲线. 设 $\zeta_1, \zeta_2 \in U$, 如果 Γ_{ζ_1} 包含在 Γ_{ζ_2}的有界余分支 $\mathrm{Int}(\Gamma_{\zeta_2})$内,则记为 $\Gamma_{\zeta_1} < \Gamma_{\zeta_2}$. 由假设,存在 $\zeta_1, \zeta_2 \in U$, 使得 $K(P_i) \cap \{\xi \in U \mid \Gamma_{\zeta_1} < \Gamma_\zeta < \Gamma_{\zeta_2}\} = \varnothing$. 设 $z_0 \in U$ 是 P_0 的 Siegel 点,则 P_i 有周期为 k 的周期点 z_i, $z_i \to z_0(i \to \infty)$.

如果存在序列$\{i_n\}$使得 $z_{i_n} \in J(P_{i_n})$, 由于对任何 $z \in \mathscr{C}$, $J(P_i) \subset \overline{\bigcup_{n \geqslant 0} P_i^{-nk}(z)}$, 故存在 $z_{i_n}^* \in \mathrm{Int}(\Gamma_{\zeta_1})$ 使得 $P_{i_n}^k(z_{i_n}^*) \in \mathrm{Ext}(\Gamma_{\zeta_2})$, 这里 $\mathrm{Ext}(\Gamma_{\zeta_2})$ 表示 Γ_{ζ_2} 的无界余分支. 设 $z_{i_n}^* \to z_0^*$, 则 $\Gamma_{z_0^*} \leqslant \Gamma_{\zeta_1}$ 且 $P_{i_n}^k(z_{i_n}^*) \to P_0^k(z_0^*)$, 矛盾.

如果对所有的 i, z_i 是 P_i 的吸引(超吸引)周期点或 Siegel 点,记 U_i 是对应的 Fatou 分支,由于 $K(P_i) \cap \{\zeta \in U \mid \Gamma_{\zeta_1} < \Gamma_\zeta < \Gamma_{\zeta_2}\} = \varnothing$, $U_i \subset \mathrm{Int}(\Gamma_{W_i})$, $J(P_i) \cap \{\zeta \in U \mid \Gamma_\zeta \leqslant \Gamma_{\zeta_1}\} \neq \varnothing$, 则用上述同样的方法导出矛盾,从而引理得证. 证毕.

下面讨论 P_0 有抛物循环的情形. 这时我们要用到 Ecallé 柱理论,它是研究抛物周期点的分叉理论的主要工具之一,Douady, Hubbard 和 Lavours 对此有过深入的研究[DH1, La]. 这里我们简单叙述一下要用到的结论,它们都可以在文献[Shi]中找到. 为叙述简单,我们假定 $P_0 \in \mathrm{Poly}_d$ 有有理中性不动点 0,即 $P_0(0) = 0$, 且 $P_0'(0) = 1 = P_0''(0)$.

由有理中性不动点的局部模型,我们有:

存在对象 Ω_+，Ω_-，φ_0 及 Φ_0 满足下面要求：

1) Ω_+ 和 Ω_- 是单连通区域，$\Omega_+ \cup \Omega_- \cup \{0\}$ 是 0 的邻域，$\partial\Omega_+$，$\partial\Omega_-$ 是 Jordan 曲线，$P_0(\overline{\Omega}_+) \subset \Omega + \cup \{0\}$，$P_0(\Omega_- \cup \{0\}) \supset \overline{\Omega}_-$，$P_0$ 在 $\Omega_+ \cup \Omega_- \cup \{0\}$ 上是单射，P_0^n 在 Ω_+ 一致收敛于 $0(n \to \infty)$；

2) $\varphi_0 : \mathrm{Dom}(\varphi_0) \mapsto \mathscr{C}$ 解析，满足

$$\varphi_0(w+1) = P_0 \circ \varphi_0(w),$$

φ_0 的定义域 $\mathrm{Dom}(\varphi_0)$ 包含 $Q_0 = \{w \in \mathscr{C} | \pi/3 < \arg(w + \xi_0) < 5\pi/3\}$ 和 $\{w | \mathrm{Im}w| > \eta_0\}$，这里 ξ_0，$\eta_0 > 0$ 充分大，$\varphi_0(Q_0) = \Omega_-$ 且 φ_0 在 Q_0 上是单射；

3) $\Phi_0 : B = \{z | P_0^n(z) \to 0\} \mapsto \mathscr{C}$ 解析，满足对 $z \in B$，

$$\Phi_0 \circ P_0(z) = \Phi_0(z) + 1,$$

Φ_0 在 $\Omega_+ \subset B$ 上单射，$\Phi_0(\Omega_+)$ 包含 $\{w \in \mathscr{C} | \mathrm{Re}w > \eta^*\}$，$\eta^* > 0$ 充分大.

对任何紧集 $A \subset \Omega_-$ 和 $c \in \mathscr{C}$，存在正整数 N，使 $\varphi_0^{-1}(A) + N - c \subset \{w | \mathrm{Re}w > \eta^*\} \subset \Phi_0(\Omega_+)$，记 $E = \Phi_0^{-1}(\varphi_0^{-1}(A) + N - c)$，那么，$\varphi_0 \circ T_c \circ \Phi_0(E) = \varphi_0(\varphi_0^{-1}(A) + N) = P_0^N(A)$，这里 $T_c(z) = z + c$.

记

$$\mathscr{P} = \{P \in \mathrm{Poly}_d | P(0) = 0,\ P'(0) = \exp(2\pi i \cdot \alpha(P)),\ \alpha(P) \neq 0,\ |\arg\alpha(P)| < \frac{\pi}{4}\},$$

如果 $P \in \mathscr{P}$ 充分接近 P_0，则 P 有两个不动点 0 和 $\sigma(P)$，当 $P \to P_0$ 时，$\sigma(P) = -2\pi\mathrm{i} \cdot \alpha(P)(1 + o(1))$，$\alpha(P) \to 0$.

对 P_0，考虑 P_0 的大轨道等价关系 $\sim_{P_0}$，则在 Ω_+ 和 Ω_- 内分别有基本区域 S_0^+ 和 S_0^-，S_0^+ 和 S_0^- 的边界由两条两端均连接 0 的解析曲线组成，一条映成另一条，将两条边界曲线粘合，则得到一两端无穷的拓扑圆柱 C_0^+ 和 C_0^-，即 $C_0^+ = \Omega_+ / \sim_{P_0}$，$C_0^- \approx \Omega_- / \sim_{P_0}$，称为 Ecallé 柱. 对 $P \in \mathscr{P}$ 充分接近 P_0，则仍有基本区域 S_P^+ 与 S_P^-，这时，它们的两条边

界曲线均连接原点 O 与 $\sigma(P)$(图 6.5).

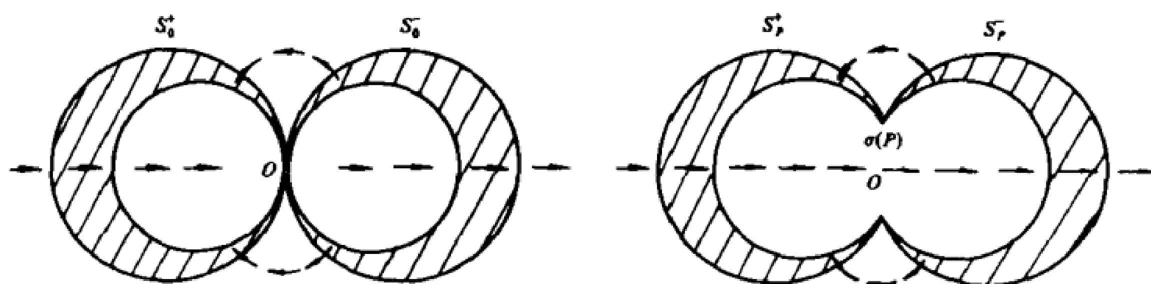


图 6.5 Ecallé 圆柱(阴影部分为其基本区域)

引理 6.13 设 W_0 是 $P_0 \in \mathrm{Poly}_d$ 的邻域, $P_n \in W_0 \cap \mathscr{P}$, 使得当 $n \to \infty$ 时 $P_n \to P_0$, 且 $1/\alpha(P_n) \bmod L \to -c$, 那么存在 k_n, 使得当 $n \to \infty$ 时, $P_n^{k_n}$ 在 B 上局部一致收敛于 $\varphi_0 \circ T_c \circ \Phi_0$.

证明参见文献[La, Shi].

引理 6.14 如果 $P_0 \in \mathrm{Poly}_d$ 有一个抛物循环, 则 $K(P)$ 在 P_0 处不连续.

证明 仍假设 P_0 如上, 存在具有非空内点的紧集 $A \subset \mathscr{C} \backslash K(P_0)$ 且 $A \subset \Omega_-$, 则 $E = \Phi_0^{-1}(\varphi_0^{-1}(A) + N - c) \subset \Omega_+ \subset K(P_0)$, $\dot{E} \neq \varnothing$. 对任何 $\varepsilon > 0$, 取 P_n 满足引理 6.13 的条件, 则由引理 6.10 可知, 当 n 充分大时, $N_\varepsilon(P_0^N(A)) \subset \mathscr{C} \backslash K(P_n)$, 但由引理 6.13 可知, 存在 k_n, $P_n^{k_n}(E) \to \varphi_0 \circ T_c \circ \Phi_0(E) = P_0^N(A)$, 因此 $P_n^{k_n}(E) \subset N_\varepsilon(P_n^N(A)) \subset \mathscr{C} \backslash K(P_n)$ (n 充分大). 于是 $E \subset \mathscr{C} \backslash K(P_n)$, 这就证明了 $K(P)$ 在 P_0 不连续. 证毕.

定理 6.13 设 $P_0 \in \mathrm{Poly}_d$, 则 $K(P)$ 在 P_0 处连续的充分必要条件是 P_0 没有抛物循环.

证明 根据引理 6.14, 只要证明当 P_0 没有抛物循环时, $K(P)$ 在 P_0 处连续. 此时, 若 $\dot{K}(P_0) = \varnothing$, 则 $J(P_0) = K(P_0)$, 由推论 6.2 和引理 6.11, 即得: 若 $\dot{K}(P_0) \neq \varnothing$, 则 $\dot{K}(P_0)$ 仅有吸引(超吸引)循环或 Siegel 循环. 但由引理 6.10—6.12 可知, 对任何 $z \in K(P_0)$ 及其 ε-邻域 V_z, 存在 P_0 的邻域 W, 使得当 $P \in W$ 时, $K(P) \cap V_z \neq \varnothing$. 但 $K(P_0)$ 是紧集, 因此, 存在有限个 V_z 覆盖 $K(P_0)$, 故存在 P_0 的邻域 W_0

$\subset \mathrm{Poly}_d$，使得当 $P \in W_0$ 时，$K(P_0) \subset N_\varepsilon(K(P))$. 结合推论 6.2，即得$K(P)$在 P_0 连续. 证毕.

由此可见，在 Mandelbrot 集上，除了双曲分支的根以外，K_c 关于参数 c 连续，而双曲分支的根只有可列多个点.

§6.6 高次多项式的动力学

对于高次多项式 $P \in \mathrm{Poly}_d$，$d \geqslant 3$，有不止一个临界点，其动力系统比二次多项式复杂得多. Branner 和 Hubbard 对三次多项式有很深刻的研究，他们的研究要用到非常复杂的技巧. 但对于下面形式的多项式 $P_{d,c}(z) = z^d + c(d \geqslant 2)$，仅有一个临界点 0，这时，同样可以定义 Mandelbrot 集：

$$M_d = \{c \in \mathscr{C} \mid J(P_{d,c}) \text{ 是连通的}\},$$

采用与二次多项式完全相同的方法可以证明：存在共形映射 Φ_d：$\mathscr{C} \backslash M_d \mapsto \mathscr{C} \backslash \overline{\Delta}$，故 M_d 也是单连通的，且对 M_d 的双曲分支 W，乘子 $\rho_d : W \mapsto \Delta$ 是 $d-1$ 层分支覆盖，仅有一个分支点为 W 的中心. 另外下列事实也容易验证：M_d 关于实轴对称，且

$$\{c \in \mathscr{C} \mid |c| \leqslant d^{-\frac{1}{d-1}}(1 - d^{-1})\} \subset M_d \subset \{c \in \mathscr{C} \mid |c| \leqslant 2^{\frac{1}{d-1}}\};$$

当 d 是偶数时，$M_d \cap \mathscr{R} = [-2^{\frac{1}{d-1}}, d^{-\frac{1}{d-1}}(1 - d^{-1})]$；

当 d 是奇数时，$M_d \cap \mathscr{R} = [-d^{-\frac{1}{d-1}}(1 - d^{-1}), d^{-\frac{1}{d-1}}(1 - d^{-1})]$，且关于虚轴对称；

当 $d \to \infty$ 时，在 Hausdorff 距离下，$M_d \to \overline{\Delta}$.

下面讨论 $P_{d,c}$的 Julia 集，对固定的 c，有下述引理.

引理 6.15 对任何 $\varepsilon > 0$，存在 d_0，当 $d \geqslant d_0$ 时，$J(P_{d,c}) \subset \{z \in \mathscr{C} \mid |z| < 1 + \varepsilon\}$. 若 $|c| \neq 1$，则 $J(P_{d,c}) \subset \{z \in \mathscr{C} \mid |z| > 1 - \varepsilon\}$.

证明 对给定的 $\varepsilon > 0$，存在 d_0，使得当 $d \geqslant d_0$ 时，$(1+\varepsilon)^d - |c| \geqslant 1 + \varepsilon$，因此当 $|z| > 1 + \varepsilon$ 时，$|P_{d,c}^n(z)| > 1 + \varepsilon$，$n > 0$，因此，$\{P_{d,c}^n\}$在 $\{z \in \mathscr{C} \mid |z| > 1 + \varepsilon\}$ 中正规，$J(P_{d,c}) \subset \{z \in \mathscr{C} \mid |z| \leqslant$

$1+\varepsilon\}$. 又若当 $|c|=1+\delta>1$ 时，存在 d_0，则当 $d\geqslant d_0$ 时，$(1-\varepsilon)^d<\dfrac{\delta}{2}$ 且 $\left(1+\dfrac{\delta}{2}\right)^d>2+\dfrac{3}{2}\delta$. 如果 $|z|<1-\varepsilon$，那么 $|P_{d,c}^n(z)|>1+\dfrac{\delta}{2}(n>0)$，于是 $J(P_{d,c})\subset\{z\in\mathscr{C}\mid|z|\geqslant1-\varepsilon\}$；若当 $|c|=1-\delta<1$ 时，存在 d_0，则当 $d\geqslant d_0$ 时，$(1-\varepsilon)^d<\dfrac{\delta}{2}$ 且 $\left(1-\dfrac{\delta}{2}\right)^d<\dfrac{\delta}{2}$. 如果 $|z|<1-\varepsilon$，则 $|P_{d,c}^n(z)|<1-\dfrac{\delta}{2}(n>0)$，同样有 $J(P_{d,c})\subset\{z\in\mathscr{C}\mid|z|\geqslant1-\varepsilon\}$. 证毕.

定理 6.14 对任何固定的 c，$|c|\neq1$，在 Hausdorff 距离下，$J(P_{d,c})\to S^1=\partial\Delta(d\to\infty)$.

证明 引理 6.15 说明了对任何 $\varepsilon>0$，当 d 充分大时，$J(P_{d,c})\subset\{z\in\mathscr{C}\mid1-\varepsilon\leqslant|z|\leqslant1+\varepsilon\}$，故只要证明，当 d 充分大时，$S^1\subset N_\varepsilon(J(P_{d,c}))$，如若不然，则存在 $z_0\in S^1$ 及其邻域 U_0 和序列 $\{d_n\}(n\geqslant1)$，使得 $J(P_{d_n,c})\cap U_0=\varnothing(d_n\to\infty)$，我们用对数容量来证明. 记 $\mathrm{Cap}(E)$ 表示紧集 E 的对数容量，则对首一多项式 P，$\mathrm{Cap}(J(P))=1$，而 $\mathrm{Cap}(\overline{\Delta})=1$. 若记 $V_0=\overline{\Delta}\backslash U_0$，则 $\mathrm{Cap}(V_0)<1$. 记 $V_\varepsilon=\{z\in\mathscr{C}\mid|z|<1+\varepsilon\}\backslash U_0$，利用容量的单调连续性，$\mathrm{Cap}(V_\varepsilon)\to\mathrm{Cap}(V_0)(\varepsilon\to0)$，因此当 ε 充分小时，$\mathrm{Cap}(V_\varepsilon)<1$，但当 n 充分大时，$J(P_{d_n,c})\subset V_\varepsilon$，得 $1=\mathrm{Cap}(J(P_{d_n,c}))\leqslant\mathrm{Cap}(V_\varepsilon)<1$，这是矛盾的. 这就说明了 $S^1\subset N_\varepsilon(J(P_{d,c}))$. 证毕.

下面考虑 $|c|=1$ 且 $c=\mathrm{e}^{2\pi i\theta}$，$\theta=p/q$ 是有理数的情形，这里 $(p,q)=1$，$A=\{n\theta\bmod1\mid n=1,2,\cdots\}$ 是 $\pi=\mathscr{R}/\mathscr{Z}$ 上的有限点集.

对于某个 d，如果 $\{P_{d,c}^n(0)\}_{n\geqslant1}\subset S^1$，则必须

$$(d\theta-\theta)\bmod1=\frac{1}{3},\text{或}(d\theta-\theta)\bmod1=\frac{2}{3}.$$

当 $(d\theta-\theta)\bmod1=\dfrac{1}{3}$ 时，可分为

$$\begin{cases}(d\theta-\theta)\bmod 1=\dfrac{1}{3},\\ \left(d\left(\theta+\dfrac{1}{6}\right)-\theta\right)\bmod 1=\dfrac{1}{3};\end{cases}\quad \text{或}\begin{cases}(d\theta-\theta)\bmod 1=\dfrac{1}{3},\\ \left(d\left(\theta+\dfrac{1}{6}\right)-\theta\right)\bmod 1=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

直接验证可知,后者是不可能的. 对于 $(d\theta-\theta)\bmod 1=\dfrac{2}{3}$,进行同样的讨论我们得到:要使 $\{P_{d,c}^{n}(0)\}\subset S^{1}(n\geqslant 1)$, 只能

$$\text{I}\begin{cases}(d\theta-\theta)\bmod 1=\dfrac{1}{3},\\ \left(d\left(\theta+\dfrac{1}{6}\right)-\theta\right)\bmod 1=\dfrac{1}{3};\end{cases}\quad \text{或 II}\begin{cases}(d\theta-\theta)\bmod 1=\dfrac{2}{3},\\ \left(d\left(\theta+\dfrac{5}{6}\right)-\theta\right)\bmod 1=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

此时,我们有

$$0\to P_{d,c}(0)=c\to P_{d,c}^{2}(0)\to P_{d,c}^{3}(0)=P_{d,c}^{2}(0),$$

因此, $0\in J(P_{d,c})$. 上面只用到 $\{P_{d,c}^{n}(0)\}\subset S^{1}\quad(n=1,2,3)$.

记 $\Theta=\{\theta\in\mathscr{Q}/\mathscr{Z}\mid$ 对 $c=\mathrm{e}^{2\pi i\theta}$, 存在 $d\geqslant 2$, 使得 $\{P_{d,c}^{n}(0)\}\subset S'(n\geqslant 1)\}$.

定理 6.15 当 $c=\mathrm{e}^{2\pi i\theta}$, $\theta\in\mathscr{Q}/\mathscr{Z}$ 时, $J(P_{d,c})\to S^{1}(d\to\infty)$ 的充分必要条件是 $\theta\notin\Theta$.

证明 若 $\theta\in\Theta$, 则存在 d_0 使 $\{P_{d_0,c}^{n}(0)\}\subset S^{1}(n\geqslant 1)$. 设 $\theta=\dfrac{p}{q}$, $(p,q)=1$, 令 $d_k=d_0+6qk$, 则 $\{P_{d_k,c}^{n}(0)\}\subset S^{1}(n\geqslant 1)$, 于是 $0\in J(P_{d_k,c})$, $J(P_{d,c})\not\to S^{1}$. 若 $\theta\notin\Theta$, 则对所有的 d, $\{P_{d,c}^{n}(0)\}\not\subset S^{1}(n\geqslant 1)$. 记 $n(d)$ 是第一个使得 $P_{d,c}^{n}(0)\notin S^{1}$ 的 n, 则 $2\leqslant n(d)\leqslant 4$, $\{P_{d,c}^{n(d)-1}(0)\}(d\geqslant 2)$ 是 S^{1} 上的有限子集,从而 $A^{*}=\{P_{d,c}^{n(d)}(0)\}(d\geqslant 2)$ 是有限集. 取 $\varepsilon>0$ 充分小,使得 $A^{*}\cap\{1-\varepsilon\leqslant|z|\leqslant 1+\varepsilon\}=\varnothing$. 由于当 d 充分大时, $P_{d,c}^{i}(\{|z|<1-\varepsilon\})$ 是 $P_{d,c}^{i}(0)$ 的充分小邻域 $(1\leqslant i\leqslant n(d))$, 故当 $|P_{d,c}^{n(d)}(0)|>1$ 时, $P_{d,c}^{n(d)}(\{|z|<1-\varepsilon\})\subset\{|z|>1+\varepsilon\}$; 当 $|P_{d,c}^{n(d)}(0)|<1$ 时, $P_{d,c}^{n(d)}(\{|z|<1-\varepsilon\})\subset\{|z|<1-\varepsilon\}$, 因此,当 d 充分大时, $\{P_{d,c}^{n}\}_{n\geqslant 1}$ 在 $\{|z|<1-\varepsilon\}$ 上正规. 由引理

6.15，与定理6.14同样证明得 $J(P_{d,c}) \to S^1 (d \to \infty)$. 证毕.

我们可以对 Θ 作如下具体描述.

定理 6.16 $\theta = \frac{p}{q} \in \Theta$ 的充要条件为下列四种情形之一成立：

1) $p = 3p' + 1, q = 3(6k' + 5)$;

2) $p = 3p' + 2, q = 3(6k' + 1)$;

3) $p = 3p' + 1, q = 3(6k' + 1)$;

4) $p = 3p' + 2, q = 3(6k' + 5)$.

这里 p' 和 k' 为使 $(p, q) = 1$ 的任意非负整数.

证明留给读者.

当 $\theta \in \Theta$ 时，对 $c = e^{2\pi i\theta}$，有无限多个 d 使 $P_{d,c}^2(0) = P_{d,c}^3(0)$，记 $D_\theta = \{d \in \mathscr{N} | P_{d,c}^2(0) = P_{d,c}^3(0), c = e^{2\pi i\theta}\}$，则 D_θ 与 $\mathscr{N} \backslash D_\theta$ 都是无穷集.

定理 6.17 如果 $\theta \in \Theta$，则当 $d \in \mathscr{N} \backslash D_\theta$ 且 $d \to +\infty$ 时，$J(P_{d,c}) \to S^1$；当 $d \in D_\theta$ 且 $d \to +\infty$ 时，$J(P_{d,c}) \to \overline{\Delta} (c = e^{2\pi i\theta})$.

证明 与定理 6.15 同样证明，当 $d \in \mathscr{N} \backslash D_\theta$ 且 $d \to +\infty$ 时，$J(P_{d,c}) \to S^1$，考虑 $d \in D_\theta$，此时 $J(P_{d,c})$ 是局部连通的. 又 $0 \in J(P_{d,c})$，选取 $z_d \in J(P_{d,c})$ 使得 $|z_d| \geqslant 1$（由 $\mathrm{Cap}J(P_{d,c}) = 1$ 可知，z_d 必存在）. 取 γ_d 是落在 $J(P_{d,c})$ 中连接 0 与 z_d 的道路，由于 $e^{\frac{2\pi i}{d}} J(P_{d,c}) \subset J(P_{d,c})$，故 $e^{\frac{2\pi ik}{d}} \gamma_d \subset J(P_{d,c})$，$k = 0, 1, 2, \cdots, d-1$，因此，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $d_0 > \frac{2\pi}{\varepsilon}$，使得当 $d \in D_\theta$ 且 $d \geqslant d_0$ 时，$\overline{\Delta} \subset N_\varepsilon(J(P_{d,c}))$. 由引理 6.15 可知，当 $d \in D_\theta$ 且 $d \to +\infty$ 时，$J(P_{d,c}) \to \overline{\Delta}$. 证毕.

一个自然的问题是：当 θ 是无理数时，应怎样刻画 $J(P_{d,c})$ 的极限状态？

对于一般的高次多项式，由于其复杂性，我们在这儿仅叙述一下有关的结论.

定义 6.10 集合

$$\mathscr{C}_d = \{P \in \mathrm{Poly}_d | J(P) \text{ 是连通的}\}$$

称为 Poly_d 中的连通迹(connectness locus).

$\mathscr{C}_2$ 即为 Mandelbrot 集 M. 与 M 一样, Branner-Hubbard-Lavours[BH, La]证明了下面的定理.

定理 6.18[BH] $\mathscr{C}_d$ 是 Poly_d 中单连通的紧集 ($d \geqslant 2$).

事实上,若一个实 $2d-3$ 维球面 S^{2d-3}包含在 $\mathscr{C}_d$ 内,则 S^{2d-3}所包含的整个球体在 $\mathscr{C}_d$ 内,因而 $\mathscr{C}_d$ 是腔状的(cell like).

对于三次多项式,Branner 和 Hubbard 还描述了 Julia 集的拓扑:三次多项式 P 有两个临界点 c_1, c_2,若 c_1 与 c_2 均在$\mathscr{C}\backslash K(P)$内,则 $J(P)$是一个 Cantor 集;当 $c_1, c_2 \in K(P)$ 时,$J(P)$连通;当 c_1 与 c_2 之一在$\mathscr{C}\backslash K(P)$内,另一个在 $K(P)$内时,有下面的定理.

定理 6.19[BH] $P \in \mathrm{Poly}_3$ 有有限临界点 c_1, c_2,若 $c_1 \in K(P)$, $c_2 \in \mathscr{C}\backslash K(P)$, 则 $J(P)$是 Cantor 集的充要条件是 c_1 在 $K(P)$的游荡分支内.

问题 6.2 描述度大于 3 的多项式的 Julia 集成为 Cantor 集的条件是什么?

参考文献

[DH1] A. Douady and J. H. Hubbard, Étude dynamique des polynomes complexes. *Publ. Math. d'Orsay* I (2) 1984; II (4) 1985.

[DH2] A. Douady and J. H. Hubbard, Itération des polynõrmes quadratique complexes. *C. R. Acad. Sci. Ser I. Math.* 294 (1982) 123-126.

[Mc] C. McMullen, *Automorphisms of rational maps. in Holomorphic Functions and Moduli I. Ed. Drasin.* 31-60. Springer-Verlag 1988.

[Dev] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Benjanin/Cummings 1986.

[Br] H. Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions.

Arkiv. for Mat. 6(1965) 103-144.

[BH] B. Branner and J. H. Hubbard, The iteration of cubic polynomials. I. *Acta Math.* 160 (1988) 143-206; II. *Math. Rep.* (12) 1989.

[Ca] C. Caratheodory, Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. *Math. Ann.* 73 (1913) 323-370.

[Ah] L. Ahlfors, *Complex Analysis.* McGraw-Hill 1966.

[Bie] B. Bielefield, *Conformal dynamics problem lists.* Preprint of IMS (1) 1990.

[TY] Tan Lei and Yin Yongcheng, Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps. *Science in China, Ser.* A 39 No. 1 (1996) 39-47.

[Shi] M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of thd Mandelbrot set and Julia sets.* Preprint of IMS (7) 1991.

[La] P. Lavaurs, Systèmes dynamiques holomorphes: *Explosion de points periodiques paraboliques.* Thèse de doctrat de l' Université de Paris-Sud. Orsay, France 1989.

[Lyu] M. Yu. Lyubich, The dynamics of rational trasforms: The topological picture. *Russian Math. Surveys* 41 (1986) 43-117.

第七章　类多项式与拟共形手术

§7.1　类多项式及其基本动力学性质

在多项式动力学中，多项式 P 在其填充 Julia 集 $K(P)$ 的邻域内的扩张性起到了关键作用. Douady 和 Hubbard 引进了类多项式映射，将其推广到一般的解析分支覆盖，得到了与多项式类似的结论. 由于类多项式的一般性，类多项式理论在复解析动力系统的研究中已发挥了非常重要的作用.

定义 7.1　设 U' 与 U 是$\mathscr{C}$中单连通开集，$\overline{U'} \subset U$，如果 $f: U' \mapsto U$ 是度为 d 的解析的分支覆盖(逆紧映射)，则称(U, U', f)是度为 d 的类多项式.

在定义域清楚的情况下，就称 $f: U' \mapsto U$ 是类多项式.

例 7.1　设 P 是多项式，取 R 充分大，使得$U = \{z \in \mathscr{C} \mid |z| < R\}$包含 P 的所有有限临界值，则 $U' = P^{-1}(U)$ 是单连通的且 $\overline{U'} \subset U$，因此(U, U', P)是类多项式.

例 7.2　设 $f(z) = \cos z - 2$，记 $U' = \{z \in \mathscr{C} \mid |\mathrm{Re} z| < 2, |\mathrm{Im} z| < 3\}$，$U = f(U')$，则 $\overline{U'} \subset U$，且 $f: U' \mapsto U$ 是度为 2 的分支覆盖，故(U, U', f)是度为 2 的类多项式.

例 7.3　度为 d 的类多项式的微小扰动是度为 d 的类多项式. 设 $f: U' \to U$ 是度为 d 的类多项式，f 有 $d-1$ 个临界点 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{d-1}$ (计重数) $\in U'$，取 $\varepsilon > 0$，使 $\varepsilon < d(U', \mathscr{C} \setminus U)$，记 U_ε 是 $\{z \in \mathscr{C} \mid d(z, \mathscr{C} \setminus U) > \varepsilon\}$ 包含 U'的分支，如果 ε 充分小，使 U_ε 包含所有临界值 $f(\omega_1), f(\omega_2), \cdots, f(\omega_{d-1})$，那么，若 $g: U' \mapsto \mathscr{C}$ 是全纯函数，且使

$|g(z)-f(z)|<\varepsilon(\forall\, z\in U')$，则集合 $U'_\varepsilon=g^{-1}(U_\varepsilon)$ 是单连通的且 $g:U'_\varepsilon\to U_2$ 是度为 d 的类多项式.

定义 7.2 设 $f:U'\mapsto U$ 是度为 d 的类多项式，记

$$K(f)=\bigcap_{n\geqslant 0}f^{-n}(U'),$$

等价地

$$K(f)=\{z\in U'\mid 对任何\, n\in\mathcal{N},\ f^n(z)\in U'\},$$

则 $K(f)$ 是 U' 内紧集. $K(f)$ 称为 f 的填充 Julia 集，$J(f)=\partial K(f)$ 称为 f 的 Julia 集.

下面的几个性质都是多项式动力学中的结果，它们对类多项式仍然成立，证明方法与多项式完全相同.

定理 7.1 $K(f)$ 与 $J(f)$ 都是 f-完全不变的，$K(f)$ 与 $\dot{K}(f)$ 的每个分支都是单连通的，$\{f^n\}$ 在任何 $z\in\dot{K}(f)$ 处是正规的.

定理 7.2 $\dot{K}(f)$ 的每个分支是最终周期的，每个周期循环是吸引循环、超吸引循环、抛物循环和 Siegel 盘之一，每个吸引、超吸引循环和抛物循环内至少含有一个 f 的临界点.

定理 7.3 $K(f)$ 是连通的充要条件为 f 的所有临界点都在 $K(f)$ 中，如果 $K(f)$ 中没有 f 的临界点，则 $K(f)$ 是 Cantor 集.

定理 7.4 下面两个条件等价：

1）$K(f)$ 中每个临界点轨道都趋向于吸引或超吸引周期点；

2）存在 $J(f)$ 的邻域上的双曲度量和常数 $k>1$，使得对任何 $z\in J(f)$ 及 z 处任何切向量 $t\in T_z$，成立

$$\|(\mathrm{d}_zf)(t)\|_{f(z)}\geqslant k\|t\|_z.$$

如果上述条件之一成立，则称 f 为双曲的.

定义 7.3 设 $f:U'\mapsto U$ 和 $g:V'\mapsto V$ 是具有相同度的类多项式，如果存在 $K(f)$ 的邻域到 $K(g)$ 的邻域的同胚映射 φ，使得在 $K(f)$ 的邻域内满足 $\varphi\circ f=g\circ\varphi$，则称 f 和 g 拓扑等价，记为 $f\sim_{\mathrm{top}}g$；如果 φ 是拟共形的，则称 f 和 g 拟共形等价，记为 $f\sim_{\mathrm{qc}}g$；如果 φ 是共形的，则称 f 和 g 共形等价，记为 $f\sim_{\mathrm{conf}}g$；如果 $f\sim_{\mathrm{qc}}g$ 且可选取 φ，使得在

$K(f)$上$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}=0$，则称 f 和 g 混合等价，记为 $f\sim_{hb}g$，并且下列关系成立：

$$f\sim_{conf}g\Rightarrow f\sim_{hb}g\Rightarrow f\sim_{qc}g\Rightarrow f\sim_{top}g.$$

定义 7.4 设 $f: U'\mapsto U$ 和 $g: V'\mapsto V$ 是类多项式，而且$K(f)$和$K(g)$是连通的，如果存在单连通区域 U_1, U'_1, V_1, V'_1，使得

$$K(f)\subset U'_1\subset U_1\subset U,$$

$$K(g)\subset V'_1\subset V_1\subset V,$$

$$f^{-1}(U_1)=U'_1,\ g^{-1}(V_1)=V'_1,$$

以及共形映射

$$\varphi: U_1\backslash K(f)\mapsto V_1\backslash K(g),$$

使得在 $U'_1\backslash K(f)$ 上，$\varphi\circ f=g\circ\varphi$，则称 f 和 g 是外等价的，记为 $f\sim_{ext}g$.

我们还要将外等价的概念推广到 $K(f)$不连通的情况.

§7.2 整理定理

下面我们对每个度为 d 的类多项式 f 构造一个度为 d 的实解析映射 $h_f: S^1\mapsto S^1$，且 h_f 除了一个旋转共轭外是唯一的，称 h_f 为 f 的外映射.

首先给出 $K(f)$是连通时 h_f 的构造，这种情况比较简单，便于理解.

设 $K(f)$连通，α 是 $U\backslash K(f)$ 到 $W_+=\{z\,|\,1<|z|<R\}$ 上的共形映射，使得当 $z\to\partial K(f)$ 时，$|\alpha(z)|\to 1$，记 $W'_+=\alpha(U'\backslash K(f))$，$h_+=\alpha\circ f\circ\alpha^{-1}: W'_+\to W_+$，又设 $\tau: z\mapsto\frac{1}{\bar{z}}$ 是关于 S^1 的反射，记 $W_-=\tau(W_+)$，$W'_-=\tau(W'_+)$，$W=W_+\cup W_-\cup S^1$，和 $W'=W'_+\cup W'_-\cup S^1$，那么由 Schwartz 反射原理，h_+可以延拓为解析映射 $h: W'$

$\mapsto W$. 令 $h_f = h|_{S^1}$，由于 α 除了一旋转外是唯一的，因此 h_f 除一旋转共轭外是唯一的，h_f 还是严格扩张的. 事实上，设 $\pi : \widetilde{W} \mapsto W$ 是 W 的万有覆盖，由于 $h : W' \mapsto W$ 是无分支的覆盖，h^{-1}可提升为 $\widetilde{W}$到 $\widetilde{W}' \subsetneq \widetilde{W}$ 的单值映射 $\widetilde{h}$，这样 $\widetilde{h}$ 为 $\widetilde{W}$上严格压缩的双曲度量（Poincaré 度量），因此 h 在紧集 $S^1 \subset W'$ 上严格扩张，即 h_f 严格扩张.

对一般情形，$K(f)$不一定连通，我们先构造 Riemann 曲面 T_f 及其开子集 $T'_f \subset T_f$ 以及全纯映射 $F_f : T'_f \mapsto T_f$.

设 $L \subset U'$ 是包含 $f^{-1}(\overline{U'})$ 和 f 的所有临界点的单连通紧子集，$X_0 = U \backslash L$ 是二连通的，令 $\pi_n : X_n \mapsto X_0$ 是覆盖映射，$\deg\pi_n = d^n$，$n = 1, 2, \cdots$，即当 X_0 共形等价于圆环 $A_0 = \{z \mid 1 < |z| < r\}$ 时，X_n 取为共形等价于 $A_n = \{z \mid 1 < |z| < r^{\frac{1}{d^n}}\}$，而 π_n 共形共轭于 $\pi'_n : A_n \mapsto A_0$，$\pi'_n(z) = z^{d^n}$. 这样，每个 X_n 是二连通的，且若 X_0 有共形模 $\log r$，X_n 有共形模$\frac{1}{d^n}\log r$，定义覆盖映射 $\rho_n : X_{n+1} \mapsto X_n$，使得 $\pi_n \circ \rho_n = \pi_{n+1}$，则 $\deg\rho_n = d$.

对每个 n，将 $f : U' \backslash L \mapsto U \backslash f(L) \subset U \backslash L$ 提升为 $\widetilde{f}_n : \pi_n^{-1}(U' \backslash L) \subset X_n \mapsto \pi_{n+1}^{-1}(U \backslash f(L)) \subset X_{n+1}$，使得下图中的交换成立，即在 $\pi_n^{-1}(U' \backslash L) \subset X_n$ 上成立 $f \circ \pi_n = \pi_{n+1} \circ \widetilde{f}_n$. 计算 $\widetilde{f}_n$ 的度得 $\widetilde{f}_n$ 是单射.

$$\begin{array}{ccc} \pi_n^{-1}(U' \backslash L) & \xrightarrow{\widetilde{f}_n} & X_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n+1}} \\ U' \backslash L & \xrightarrow{f} & U \backslash L \end{array}$$

对每个 n，通过 $\widetilde{f}_n$ 将 X_n 的 $\pi_n^{-1}(U' \backslash L)$ 部分与 X_{n+1} 的 $\pi_{n+1}^{-1}(U \backslash f(L))$ 部分粘合，粘合关系为 x 与 $\widetilde{f}_n(x)$ 相粘. 我们把这个粘合关系记为 $x \sim \widetilde{f}_n(x)$，$x \in \pi_n^{-1}(U' \backslash L) \subset X_n$. 再记$\coprod_{n=0}^{\infty} X_n$ 是 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的不交并，那么可定义 Riemann 曲面 $T_f = \coprod_{n=0}^{\infty} X_n / \sim$，$T'_f = \coprod_{n=1}^{\infty} X_n / \sim$. 又

由于 $\pi_n \circ \rho_n = \pi_{n+1}$，$\pi_{n+1} \circ \tilde{f}_n = f \circ \pi_n$，得 $\pi_n \circ \rho_n \circ \tilde{f}_n = \pi_{n+1} \circ \tilde{f}_n = f \circ \pi_n = f \circ \pi_{n-1} \circ \rho_{n-1} = \pi_n \circ \tilde{f}_n \circ \rho_{n-1}$，选取合适的提升，有 $\rho_n \circ \tilde{f}_n = \tilde{f}_n \circ \rho_{n-1}$，故 $x \sim y = \tilde{f}_n(x)$ 这意味着 $\rho_{n-1}(x) \sim \rho_n(y)$. 因此，映射序列 ρ_n 可以诱导为 $T'_f \to T_f$ 的解析映射 $F_f: T'_f \to T_f$（见图 7.1）.

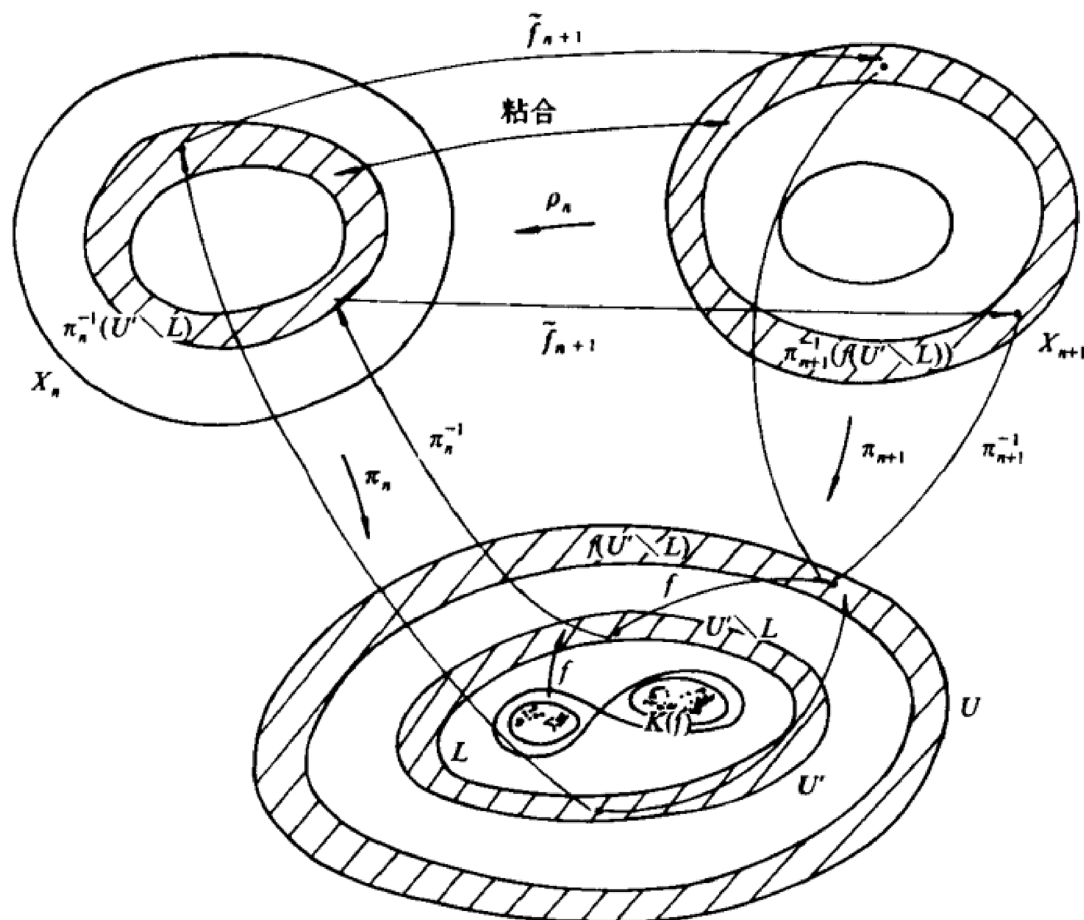


图 7.1 Riemann 曲面 T_f 的构造

由构造 T_f，T'_f 均为二连通区域，且由环域共形模的加法法则（参见文献[Lev]），T_f 有有限共形模 $\log R \leqslant \log r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d^n}$. 设 $\alpha: T_f \mapsto W_+ = \{z \mid 1 < |z| < R\}$ 是共形映射，则与 $K(f)$连通时情形一样（用 F 代替 f），可构造实解析扩张映射 $h_f: S^1 \mapsto S^1$.

T_f，T'_f 与 F_f 不依赖于 L 的选取，因此，除了一旋转共轭外，h_f 是唯一的. 当 $K(f)$连通时，$\pi_n = f^n$，$\rho_n = f$，$T_f \sim U \mid K(f)$，故定义与前面相同，外映射 h_f 已定义好.

设 $U_1 \subset U$ 是单连通子集，使得 $U_1' = f^{-1}(U_1)$ 包含 f 的所有临界点，记 $f_1: U'_1 \to U_1$ 是类多项式 $f: U' \mapsto U$ 在 U'_1 上的限制，则 $f_1: U'_1 \mapsto U_1$ 是与 f 具有相同的度的类多项式. 同样构造 f_1 的 T_{f_1}，T'_{f_1} 及 h_{f_1}，令 $\alpha_1: T_{f_1} \mapsto W_1$ 是共形映射，则 $\beta = \alpha \circ \alpha_1^{-1}|_{S^1}$ 是 h_{f_1} 与 h_f 间的实解析共轭同胚.

若 $f: U' \mapsto U$ 和 $g: V' \mapsto V$ 是具有相同度的类多项式，h_f 和 h_g 是它们的外映射，如果 $K(f)$ 与 $K(g)$ 是连通的，则用上述方法容易证明 f 与 g 外等价当且仅当 h_f 和 h_g 是实解析共轭的，因此，在一般情形，引进定义 7.5.

定义 7.5 设 $f: U' \mapsto U$ 与 $g: V' \mapsto V$ 是具有相同度的类多项式，如果它们的外映射 h_f 与 h_g 是实解析共轭的，则称 f 与 g 是外等价的.

命题 7.1 设 $f: U' \mapsto U$ 是度为 d 的类多项式，则 f 共形等价于一个多项式当且仅当 f 外等价于 $z \mapsto z^d$.

证明 如果 f 共形等价于多项式 P，P 在 ∞ 的邻域内共形共轭于 $P_0: z \mapsto z^d$，选取充分大的 V 和 $L \subset V' = P^{-1}(V)$，那么 P 与 P_0 的局部共形共轭 φ(在 $U \setminus L$ 上有定义)可以诱导 P 的 Riemann 曲面 T_P 到 P_0 的 Riemann 曲面 T_{P_0} 的共形映射 Φ，且满足 $\Phi \circ F_P = F_{P_0} \circ \Phi$ (在此情形 $F_{P_0} = P_0$). 因此 P 与 $z \mapsto z^d$ 是外等价的，而 f 自然是外等价于 P 的，故 f 与 $z \mapsto z^d$ 外等价.

另一方面，设 $f: U' \mapsto U$ 是类多项式，$F_f: T'_f \mapsto T_f$，如果 f 与 $P_0: z \mapsto z^d$ 是外等价的，那么 h_f 与 $z^d|_{S^1}$ 在 S^1 上是实解析共轭的，存在 T_f 的开子集 T_1(当 n 充分大时，$T_1 \supset X_n$)及共形映射 $\varphi: T_1 \mapsto W_1 = V_1 \setminus \overline{\Delta}$ (这里 V_1 是 $\mathscr{C}$ 中 $\overline{\Delta}$ 的开邻域)，使得在 $T'_1 = F_f^{-1}(T_1)$ 上成立 $\varphi \circ F_f = P_0 \circ \varphi$.

$F_f: T'_f \mapsto T_f$ 是度为 d 的覆盖映射，如果 $\sigma: T'_f \mapsto T'_f$ 是 $\pi_1(T_f) = \mathscr{Z}$ 的生成元，$\sigma_0: z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{d}} z$，那么当 n 充分大时，在 X_n 上成立 $\varphi \circ \sigma = \sigma_0 \circ \varphi$，因此，如果 φ 在 X_n 上有定义，则可通过 $\varphi(x) = P_0(\varphi \circ F_f^{-1}(x))$ 将 φ 延拓到 X_{n-1} 上，这样 φ 可以延拓为解析单射 $\varphi: T_f \mapsto \mathscr{C} \setminus \overline{\Delta}$，使得在

T'_f 上满足 $\varphi \circ F_f = P_0 \circ \varphi$.

现将 U 与 $\hat{\mathscr{C}} \backslash \varphi(L)$ 通过 $\varphi|_{X_0}$ 粘合，得到 Riemann 曲面 S，那么 S 是单连通的紧 Riemann 曲面，由单值化定理可知，S 共形等价于 $\hat{\mathscr{C}}$，记 $\Phi: S \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是共形映射，$\Phi(\infty) = \infty$，定义 S 上的映射 $g: S \mapsto S$ 为：$g|_{U'} = f$，$g|_{\hat{\mathscr{C}} \backslash \varphi(L)} = P_0$. 由于在 X_0 上有关系式 $\varphi \circ f = P_0 \circ \varphi$，可见定义是合理的，且 g 是解析的. 令 $P = \Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$，则 $P: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是解析映射，且 $P^{-1}(\infty) = \infty$，因此 P 是多项式，$\Phi|_{U'}$ 定义了 f 与 P 的共形等价. 证毕.

命题 7.2 设 $f: U' \mapsto U$ 是类多项式，$h: S^1 \mapsto S^1$ 是实解析扩张映射，$\deg f = \deg h = d$，那么，存在类多项式 $g: V' \mapsto V$，使得 f 与 g 混合等价，而且 g 以 h 为外等价类，即 g 的外函数 h_g 实解析共轭于 h.

证明 设 $A \subset U$ 是具有 C^1 边界的紧单连通域，$K(f) \subset \dot{A}$，A 同胚于 $\overline{\Delta}$ 且 $A' = f^{-1}(A)$ 也同胚于 $\overline{\Delta}$，$A' \subset \dot{A}$，记 $Q_f = A \backslash \dot{A}'$.

将 h 解析延拓为映射 $h: V' \mapsto V$，这里 V' 和 V 是 S^1 在 $\mathscr{C}$ 中的邻域，取 V' 充分小，则存在 $R > 1$ 使得 $B = \{z \mid 1 < |z| \leqslant R\} \subset V$，$B' = h^{-1}(B)$ 同胚于 B 且 $B' \subset \dot{B}$，记 $Q_h = B \backslash \dot{B}'$.

设 ψ_0 是 ∂A 到 ∂B 上保持定向的 C^1 微分同胚，由于 $f: \partial A' \mapsto \partial A$ 与 $h: \partial B' \mapsto \partial B$ 是 d 层覆盖，故存在微分同胚 $\psi_1: \partial A' \mapsto \partial B'$，使 $\psi_0 \circ f = h \circ \psi_1$（$\psi_1$ 是 ψ_0 的提升）. 定义 $\psi: Q_f \mapsto Q_h$ 是微分同胚，使得 $\psi|_{\partial A} = \psi_0$，$\psi|_{\partial A'} = \psi_1$.

在 Q_f 上定义复结构 $\sigma_1 = \psi^* \sigma_0$，$\sigma_0$ 是 Q_h 上的标准复结构，进而在 A 上定义复结构 σ 如下：

$$\sigma = \begin{cases} (f^n)^* \sigma_1, & \text{在 } f^{-n}(Q_f \backslash \partial A') \text{ 上}; \\ \sigma_0, & \text{在 } K(f) \text{ 上}. \end{cases}$$

由于 $f^{-n}(Q_f \backslash \partial A')$ 是互不相交的，且 f 是解析的，因此 $f^* \sigma = \sigma$，其复结构与 σ_1 的复结构相同. 由可测 Riemann 映射定理，存在拟共形映射 $\varphi: \dot{A} \mapsto \Delta$，使得 $\sigma = \varphi^* \sigma_0$.

令 $g=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(\dot{A}')\mapsto\Delta$,则 $g^*\sigma_0=\sigma_0$, g 是解析的且是度为 d 的类多项式,且因在 $K(f)$ 上 $\varphi^*\sigma_0=\sigma_0$, 故 φ 是 f 与 g 间的混合共轭映射.

记 $\Phi=\psi\circ\varphi^{-1}:X_0=\varphi(A)\backslash\varphi(\dot{A}')\mapsto Q_h$, 则由 $\Phi^*\sigma_0=\sigma_0$, Φ 是解析的. 和前面类似,可以通过 $\Phi(x)=h\circ(\Phi\circ F_g^{-1}(x))$ 延拓为 $\Phi:T_g\mapsto B$ 的解析同胚,且满足 $\Phi\circ F_g=h\circ\Phi$, 因此 h_g 实解析共轭于 h. 证毕.

对于两个具有连通填充 Julia 集的类多项式,外等价在填充 Julia 集外部是解析的,混合等价在填充 Julia 集内部是解析. 下面我们给出一个拓扑条件,使得两个类多项式混合等价和外等价蕴含了共形等价.

设 Q 是与定向圆周具有相同伦型的平面集合, $f:Q\mapsto Q$ 和 $\alpha:Q\mapsto Q$ 分别为映射度是 d 和 1 的局部同胚,且满足 $\alpha\circ f=f\circ\alpha$, 我们定义 $[\alpha, f]\in\mathscr{Z}/(d-1)$ 如下:

设 $\widetilde{Q}$是 Q 的万有覆盖, $\widetilde{f}:\widetilde{Q}\mapsto\widetilde{Q}$ 和 $\widetilde{\alpha}:\widetilde{Q}\mapsto\widetilde{Q}$ 分别是 f 与 α 的提升, $\tau:\widetilde{Q}\to\widetilde{Q}$ 是基本群 $\pi_1(Q)$的生成元所确定的自同构,那么,存在整数 i,使得 $\widetilde{f}\circ\widetilde{\alpha}=\tau^i\circ\widetilde{\alpha}\circ\widetilde{f}$, 于是可定义 $[\alpha, f]=i\bmod(d-1)\in\mathscr{Z}/(d-1)$, 定义与提升的选取无关. 事实上,由于 $\widetilde{\alpha}\circ\tau=\tau\circ\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{f}\circ\tau=\tau^d\circ\widetilde{f}$, 故用 $\tau\circ\widetilde{f}$代替 $\widetilde{f}$, i 是不变的,而用 $\tau\circ\widetilde{\alpha}$代替 $\widetilde{\alpha}$,则 $\widetilde{f}\circ(\tau\circ\widetilde{\alpha})=\tau^{i+d-1}\circ(\tau\circ\widetilde{\alpha})\circ\widetilde{f}$, 故 $i\bmod(d-1)$是提升的不变量,取 $0\leqslant i<d-1$, 称$[d, f]=i$ 是相关数.

对相关数稍作推广,设 Q_1 与 Q_2 均与定向圆周有相同伦型, $Q_1'\subset Q_1$ 和 $Q_2'\subset Q_2$, 使其内含映射是同伦等价. 设 $f:Q_1'\mapsto Q_1$ 和 $g:Q_2'\mapsto Q_2$ 是映射度为 d 的映射, $\varphi, \psi:Q_1\mapsto Q_2$ 是映射度为 1 的满射,满足 $g\circ\varphi=\varphi\circ f$, 和 $g\circ\psi=\psi\circ f$, 那么可定义$[\varphi, \psi; f, g]$如下:

设 $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$分别是在万有空间上的提升,则

$$\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{f}=\tau^i\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{\varphi},$$

$$\widetilde{\psi}\circ\widetilde{f}=\tau^j\circ\widetilde{g}\circ\widetilde{\psi},$$

其中 i, j 是整数，那么相关数 $[\varphi, \psi; f, g] = j - i \bmod (d-1) \in \mathscr{Z}/(d-1)$.

同样，定义与提升无关，如 $Q_1' = Q_1$ 且 φ 是同胚，则 $[\varphi, \psi; f, g] = [\varphi^{-1} \circ \psi; f]$.

现在，设 $f: U' \mapsto U$ 和 $g: V' \mapsto V$ 是两个类多项式，具有相同的度 $d > 1$，$K(f)$ 与 $K(g)$ 是连通的，$\varphi: U_1 \mapsto V_1$ 是 f 与 g 间的混合等价，$\psi: U_2 \backslash K(f) \mapsto V_2 \backslash K(g)$ 是 f 与 g 间的外等价（其中，U_1，U_2 和 V_1，V_2 分别是 $K(f)$ 与 $K(g)$ 的邻域），定义映射 $\Phi: U_2 \mapsto V_2$ 如下：

$$\Phi = \begin{cases} \psi, & \text{在 } U_2 \backslash K(f) \text{ 上;} \\ \varphi, & \text{在 } K(f) \text{ 上.} \end{cases}$$

命题 7.3 设 $f: U' \mapsto U$ 和 $g: V' \mapsto V$ 是度为 $d > 1$ 的类多项式，$K(f)$ 和 $K(g)$ 是连通的，$\varphi: U_1 \mapsto V_1$ 和 $\psi: U_2 \backslash K(f) \mapsto V_2 \backslash K(g)$ 分别是 f 与 g 间的混合等价和外等价，如果 $[\varphi, \psi; f, g] = 0$，则上面定义的 Φ 是 f 与 g 间的全纯等价.

证明 首先证明 Φ 是同胚.

令 $\alpha = \psi^{-1} \circ \varphi$，我们要求当接近 $K(f)$ 时，α 趋向于 id. 设 $\omega = \rho(z)|\mathrm{d}z|$ 是 $U \backslash K(f)$ 上的双曲度量，d_ω 是对应的距离，d 是欧氏距离，那么，存在常数 M，使得 $\rho(z) \geqslant M / d(z, K(f))$.

设 $\widetilde{f}$ 是 $f: U' \backslash K(f) \mapsto U \backslash K(f)$ 在 $U \backslash K(f)$ 的万有覆盖空间上的提升，则 $\widetilde{f}$ 是一一的，记 $h = \widetilde{f}^{-1}$，则 h 在度量 $\widetilde{\omega}$ 下是收缩的，这里 $\widetilde{\omega}$ 是 $U \backslash K(f)$ 的万有覆盖空间上的双曲度量.

取 U_3 是 $K(f)$ 的邻域，$C = \overline{U}_3 \backslash f^{-1}(\dot{U}_3)$，则 $\overline{U}_3 \backslash K(f) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(C)$. 再取 $\widetilde{C}$ 是 $U \backslash K(f)$ 的万有覆盖空间中的紧集，使其投影为 C，那么 $\bigcup_{i>0} \bigcup_j h^i(\tau^j(\widetilde{C}))$ 的投影为 $\bigcup_{n>0} f^{-n}(C)$，是 $K(f)$ 在 $U \backslash K(f)$ 中的邻域，记 $m = \sup_{\widetilde{x} \in \widetilde{C}} d_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\alpha}(\widetilde{x}), \widetilde{x}) < \infty$，这里 $\widetilde{\alpha}$ 是 α 的提升.

由于 $[\varphi, \psi; f, g] = 0$，则 $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{f} = \tau^i \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{\varphi}$，$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{f} = \tau^i \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{\psi}$，

故 $\widetilde{\alpha}\circ\widetilde{f}=\widetilde{f}\circ\widetilde{\alpha}$，也即 $\widetilde{\alpha}$ 与 h 可交换，又 τ 是等距变换，故对任意 $x\in C$，取 $\widetilde{x}$ 为 x 在 $\widetilde{C}$ 中提升，则

$$
\begin{aligned}
d_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\alpha}\,(h^i(\tau^j(\widetilde{x}))),\ h^i(\tau^j(\widetilde{x}))) &= d_{\widetilde{\omega}}(h^i(\widetilde{\alpha}\,(\tau^j(\widetilde{x}))),\ h^i(\tau^j(\widetilde{x}))) \\
&\leqslant d_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\alpha}\,(\tau^j(\widetilde{x})),\ \tau^j(\widetilde{x})) \\
&= d_{\widetilde{\omega}}(\tau^j(\widetilde{\alpha}\,(\widetilde{x})),\ \tau^j(\widetilde{x})) \\
&= d_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\alpha}\,(\widetilde{x}),\ \widetilde{x}) \leqslant m < \infty.
\end{aligned}
$$

如果 $d(y,\ K(f))<\varepsilon$，ε 充分小，则存在 $x\in C$ 和 $i>0$ 及 j，使得 $h^i(\tau^j(\widetilde{x}))=\widetilde{y}$（$\widetilde{y}$ 是 y 在 $\widetilde{C}$ 中提升），因此

$$
\begin{aligned}
d_{\widetilde{\omega}}(\alpha(y),\ y) &= d_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\alpha}\,(\widetilde{y}),\ \widetilde{y}) \\
&= d_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{\alpha}\,(h^i(\tau^j(\widetilde{x}))),\ h^i(\tau^j(\widetilde{x}))) \leqslant m < \infty.
\end{aligned}
$$

由引理 1.5，当 $y\to\partial K(f)$ 时，$d(\alpha(y),\ y)\to 0$，因此 $\alpha\to id$. 于是，我们证明了 Φ 是连续的. 将 φ 与 ψ 对换，同样可以证明 Φ^{-1} 是连续的，因此 Φ 是同胚.

其次，证明 Φ 是解析的.

已知 Φ 是同胚，φ 是拟共形的，在 $U_2\backslash K(f)$ 上，$\Phi=\psi$ 是共形的；在 $K(f)$ 上，$\Phi\equiv\varphi$. 考虑映射 $\Phi-\varphi$，则在 $K(f)$ 上恒为 0，记 $u=\mathrm{Re}(\Phi-\varphi)$，$v=\mathrm{Im}(\Phi-\varphi)$，我们要证明在 $K(f)$ 上，$\partial_x u$，$\partial_y u$，$\partial_x v$，$\partial_y v$ 几乎处处为零，这里只对 u 证明：令 $\eta_n:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ 是 C^1-函数，满足当 $x>\frac{2}{n}$ 时，$\eta_n(x)=x-\frac{1}{n}$；当 $x<-\frac{2}{n}$ 时，$\eta_n(x)=x+\frac{1}{n}$；当 $-\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2n}$ 时，$\eta_n(x)=0$，而在其余地方 $\eta_n'(x)<1$，那么，序列 $u_n=\eta_n\circ u$ 是 Sobolev 空间 $H^1(U_2)$ 上的 Cauchy 序列，收敛于 u，但在 $K(f)$ 的邻域内，$u_n=0$，$\partial u_n=0$，因此，在 $K(f)$ 上几乎处处成立着 $\partial u=0$. 对 v 同

样可证明：在 $K(f)$上，$\partial v = 0$，因此在 $K(f)$上我们有 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0$，而在 $U_2 \backslash K(f)$上，有 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = 0$，故 Φ 是解析的. 证毕.

如果 $\deg f = 2$，那么相关数一定为 0，故此时 Φ 为共形等价是无条件的.

推论 7.1 设 P 和 Q 是两个度为 2 的多项式，$K(P)$与$K(Q)$是连通的，如果它们是混合等价的，那么它们是仿射共轭的.

证明 此时存在 $\mathscr{C} \backslash K(f) \mapsto \mathscr{C} \backslash \overline{\Delta}$ 和 $\mathscr{C} \backslash K(g) \mapsto \mathscr{C} \backslash \overline{\Delta}$ 的共形映射 φ_P 和 φ_Q，使得在$\mathscr{C} \backslash K(f)$和$\mathscr{C} \backslash K(g)$上分别有 $\varphi_P \circ P = (\varphi_P)^d$ 和 $\varphi_Q \circ P = (\varphi_Q)^d$，则 $\psi = \varphi_Q^{-1} \circ \varphi_P$ 是外等价，因此，命题 7.3 中的 Φ：$\mathscr{C} \mapsto \mathscr{C}$ 是 P 到 Q 的共形共轭，此时必是仿射共轭. 证毕.

现在我们可以证明下面的整理定理.

定理 7.5(整理定理)

1) 每个度为 d 的类多项式 $f: U' \mapsto U$ 混合等价于一个度为 d 的多项式 P；

2) 如果 $K(f)$是连通的且 $d = 2$，则 P 除了一个仿射共轭外是唯一的.

证明 1) 设 h 是 $z \mapsto z^d$ 的外映射，则由命题 7.2，存在类多项式 $g: V' \mapsto V$，使得 f 与 g 是混合等价的，且 g 与 $z \mapsto z^d$ 是外等价的. 又由命题 7.1，存在度为 d 的多项式 P 与 g 是全纯等价的，因此 f 与 P 是混合等价的.

2) 如果有两个多项式 P 和 Q 混合等价于 f，$K(f)$是连通的，则 P 和 Q 是混合等价的，且 $K(P)$和 $K(Q)$是连通的. 由推论 7.1，即得 P 和 Q 是仿射共轭的.

证毕.

下面是类多项式理论的一个应用，设 M 是 Mandelbrot 集.

定理 7.6 设 $c_1, c_2 \in \mathscr{C}$，$c_1 \in \partial M$，如果二次多项式 $P_1(z) = z^2 + c_1$ 和 $P_2(z) = z^2 + c_2$ 是拟共形共轭的，则 $c_1 = c_2$.

证明 设 φ 是 P_1 与 P_2 间的拟共形共轭，存在$\mathscr{C}$上复结构 σ，使得

$\varphi^* \sigma_0 = \sigma$，那么 $P_1^* \sigma = \sigma$. 定义新的复结构 σ' 如下：

$$\sigma' = \begin{cases} \sigma, & \text{在 } K(P_1) \text{ 上}; \\ \sigma_0, & \text{在 } \mathscr{C} \backslash K(P_1) \text{ 上}, \end{cases}$$

那么仍有 $P_1^* \sigma' = \sigma'$. 设 σ' 对应的复伸张为 μ，则 $k = \|\mu\|_\infty < 1$ 且在 $\mathscr{C} \backslash K(P_1)$ 上，$\mu \equiv 0$.

对任意 $t \in \Delta_{1/k}$，定义 $\mu_t = t\mu'$，由可测 Riemann 映射定理，存在唯一的拟共形映射 Φ_t：$\mathscr{C} \mapsto \mathscr{C}$，使得 $\Phi_t(0) = 0$，$\Phi_t(z)/z \to 1 (z \to \infty)$，且 Φ_t 解析依赖于参数 $t \in \Delta_{1/k}$.

$\Phi_t \circ P_1 \circ \Phi_t^{-1}(z)$ 是一个二次多项式，具有形式 $z^2 + u(t)$，这里 $u: \Delta_{1/k} \mapsto \mathscr{C}$ 是解析的，由于 $u(0) = c_1 \in \partial M$，而 $u(t) \in M$（因 $K(P_1)$ 连通），故 $u(t)$ 只能是常数，特别地 $u(1) = c_1$，因此，$\varphi \circ \Phi_1^{-1}$ 是 P_1 与 P_2 间的混合等价. 由推论 7.1，P_1 与 P_2 是仿射共轭的，只能有 $c_1 = c_2$. 证毕.

在类多项式理论中，引进了这样一种技巧：对一个（或几个）已知的解析分支覆盖作适当的裁剪和粘合得到一个新的拓扑的分支覆盖，如果它拟共形共轭于某个解析的分支覆盖，那么我们可得到新的有理函数或多项式，且它们具有我们所需要的动力学性质，这种技巧称为拟共形手术. 整理定理使得我们对多项式作拟共形手术是可能的.

§7.3 有理函数的拟共形手术

对于度为 d 且 $d \geqslant 2$ 的有理函数，由 Sullivan 最终周期性定理和分类定理，我们知道，有理函数的每个 Fatou 分支是最终周期的，且每个 Fatou 分支的周期循环是吸引的、超吸引的、抛物的或是 Siegel 盘、Herman 环. Sullivan 还猜测，Fatou 分支的周期循环的个数不超过 $2d-2$. M. Shishikura 利用对有理函数进行拟共形手术的方法，对 Sullivan 猜测以肯定的回答，并构造了具有 Herman 环的有理函数. 本节介绍 Shishikura 对有理函数的拟共形手术.

一个函数称为拟正则的，如果它是一个解析函数和一个拟共形映

射的复合，Shishikura 证明了下述拟共形手术引理.

引理 7.1 设 $g: \hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 是到上的拟正则映射，如果存在$\hat{\mathscr{C}}$中互不相交的开集$\{E_i\}$和拟共形映射 $\phi_i: E_i \mapsto E_i' \subset \hat{\mathscr{C}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 及整数 $N \geqslant 0$，满足下列条件：

1) $g(E) \subset E$, $E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$；

2) $\phi \circ g \circ \phi_i^{-1}$ 在 $E_i' = \phi_i(E_i)$ 上解析，$\phi|_{E_i} = \phi_i$；

3) 在 $\hat{\mathscr{C}} \backslash g^{-N}(E)$ 上几乎处处成立 $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$，

那么存在拟共形映射 φ: $\hat{\mathscr{C}} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，使得 $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$是有理函数，且 $\varphi \circ \phi_i^{-1}$ 在 E_i' 上解析，在 $\hat{\mathscr{C}} \backslash \bigcup_{n \geqslant 0} g^{-n}(E)$ 上几乎处处成立 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0$.

证明 在$\hat{\mathscr{C}}$上定义复结构 σ 如下：设 σ_0 是标准复结构，在 E 上定义 $\sigma = \phi^* \sigma_0$，由 2)可知，在 E 上成立 $g^* \sigma = \sigma$，通过 g 对 σ 的拉回，将 σ 定义到 $\bigcup_{n \geqslant 0} g^{-n}(E)$ 上，即在 $g^{-n}(E)$ 上，$\sigma = (g^n)^* \sigma$. 而在 $\hat{\mathscr{C}} \backslash \bigcup_{n \geqslant 0} g^{-n}(E)$ 上，定义 $\sigma = \sigma_0$，由 3)可知，在整个$\hat{\mathscr{C}}$上成立 $g^* \sigma = \sigma$. 设 ϕ 是 K_1-拟共形的，g 是 K_2-拟正则的. 那么仍由 3)可知，σ 相对于 σ_0 具有有界的最大伸缩商 $K = K_1 K_2^N$，即若 μ 是 σ 的复伸张，则 $\| \mu \|_\infty \leqslant k = \dfrac{K-1}{K+1}$. 由可测 Riemann 映射定理知道，存在 K-拟共形映射 φ 使得 $\varphi^* \sigma_0 = \sigma$，因此，$\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ 在$\hat{\mathscr{C}}$上解析，故它只能是有理函数，并且有所要求的性质. 证毕.

现在设 f 是有理函数，$\deg f = d \geqslant 2$，记 n_{indeff}, n_{rat}, n_{irr}, n_{Cremer}分别是中性周期轨道、有理中性周期轨道、无理中性周期轨道、和 Cremer 点周期轨道的个数，记 n_{AB}, n_{PB}, n_{SD}和 n_{HR}分别是 Fatou 分支的吸引和超吸引循环、抛物循环、Siegel 盘循环和 Herman 环循环的个数.

定理 7.7 对任何有理函数 f，$\deg f = d \geqslant 2$，则

$$n_{AB} + n_{PB} + n_{\text{Cremer}} + n_{SD} + 2n_{HR} \leqslant 2d - 2.$$

证明 我们在这里仅对 f 没有 Herman 环循环的情况给出证明. 当 f 具有 Herman 环循环时,证明比较复杂,请参看文献[Shi].

设 $\{\alpha_i\}$ 是无理中性周期点全体, $\{\beta_i\}$ 是有理中性周期点、吸引(超吸引)周期点全体,不妨假设 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$ 在 $\mathscr{C}$ 内且 $f(\infty)=\alpha_1$, 又设 h 是度为 k 的多项式并满足 $h(\alpha_i)=0$, $h'(\alpha_i)=-1$, $h(\beta_i)=0$, $h'(\beta_i)=0$.

记 $\rho(x)$ 是光滑函数,使得当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $\rho(x)=1$; 当 $x\geqslant 2$ 时, $\rho(x)=0$. 当 ε 充分小时,定义 $H_\varepsilon(z)=z+\varepsilon^m h(z)\rho(\varepsilon|z|)$, 则 H_ε 是拟共形映射,且当 $\varepsilon\to 0$ 时, $H_\varepsilon\to id$. 考虑拟正则函数 $g_\varepsilon=f\circ H_\varepsilon$, g_ε 在 $V_\varepsilon=\{|z|\geqslant\varepsilon^{-1}\}$ 的余集即在 $\{|z|<\varepsilon^{-1}\}$ 上是解析的,当 ε 充分小时, $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$ 落在 $\{|z|<\varepsilon^{-1}\}$ 内, $\{\alpha_i\}$ 是 g_ε 的吸引(超吸引)周期点, $\{\beta_i\}$ 是 g_ε 的有理中性周期点和吸引(超吸引)周期点. 由于 α_1 是 f 的无理中性周期点(设周期为 p),它是 Siegel 点或 Cremer 点,因此存在 0 的邻域上的共形映射 ψ, 使得 $\psi(0)=\alpha_1$, $\psi'(0)=1$ 和 $\psi^{-1}\circ f^p\circ\psi(z)=\lambda z+o(z^2)$, $\lambda=(f^p)'(\alpha_1)$. 定义 $E'_\varepsilon=\psi(\{|\zeta|<\varepsilon^{\frac{m}{m+1}}\})$ 和 $E_\varepsilon=E'_\varepsilon\cup g_\varepsilon(E'_\varepsilon)\cup\cdots\cup g_\varepsilon^{p-1}(E_\varepsilon)$, 而 $\psi^{-1}\circ g_\varepsilon^p\circ\psi(z)=\lambda z((1-\varepsilon)^p+O(\varepsilon z))$, 则当 ε 充分小时, $g_\varepsilon^p(\overline{E}'_\varepsilon)\subset E'_\varepsilon$, 因此, $g_\varepsilon(E_\varepsilon)\subset E_\varepsilon$.

如果 $\varepsilon|z|\geqslant 2$, 则 $|H_\varepsilon(z)|=|z|$; 如果 $1\leqslant\varepsilon|z|\leqslant 2$, 则 $|H_\varepsilon(z)|\geqslant|z|-2\varepsilon^k|z|^k\geqslant|z|(1-2^k\varepsilon)$, 因此,当 $z\in V_\varepsilon$ 时, $|g_\varepsilon(z)-\alpha_1|\leqslant\frac{M}{|z|}\leqslant M\varepsilon$. 对 ψ^{-1} 应用 Koebe 偏差定理, E'_ε 包含一个以 α_1 为中心、以 $\frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{m}{m+1}}$ 为半径的圆域. 取 ε 充分小,使 $M\varepsilon<\frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{m}{m+1}}$, 则有 $g_\varepsilon(\overline{V}_\varepsilon)\subset E'_\varepsilon$. 利用引理 7.1,则存在拟共形映射 φ, 使得 $\varphi\circ g_\varepsilon\circ\varphi^{-1}=f_\varepsilon$ 是有理函数, $\{\varphi(\alpha_i)\}$ 是 f_ε 的吸引(超吸引)周期点, $\{\varphi(\beta_i)\}$ 是 f_ε 的有理中性周期点或吸引(超吸引)周期点, $\deg f_\varepsilon=\deg g_\varepsilon=\deg f=d$. 由于每个有理中性周期点或吸引(超吸引)循环包含至少一个临界点,故 $n_{AB}(f)+n_{PB}(f)+n_{\text{irr}}(f)\leqslant n_{AB}(f_\varepsilon)+n_{PB}(f)\leqslant 2d-2$. 而 $n_{\text{irr}}=n_{\text{Cremer}}+n_{SD}$, 于是定理得证. 证毕.

上面定理事实上还证明了下述推论(比较定理 2.18).

推论 7.2 非排斥周期轨道的个数 $\leqslant 2d-2$.

推论 7.3 $n_{HR} \leqslant d-1$.

事实上,Shishikura 还证明了 $n_{HR} \leqslant d-2$,因此,二次有理函数不存在 Herman 环.利用拟共形手术的技巧,Shishikura 还证明了下面的结论.

定理 7.8 设 m_{AB}, m_{PB}, m_{SD}, m_{Cremer}, m_{HR}和 d 是满足 $m_{AB}+m_{PB}+m_{SD}+m_{\text{Cremer}}+2m_{HR} \leqslant 2d-2$ 和 $m_{HR} \leqslant d-2$ 的非负整数,则存在有理函数 f, $\deg f=d$,使得 $n_{AB}(f)=m_{AB}$, $n_{PB}(f)=m_{PB}$, $n_{SD}(f)=m_{SD}$, $n_{\text{Cremer}}(f)=m_{\text{Cremer}}$ 和 $n_{HR}(f)=m_{HR}$.

利用拟共形手术方法,还可以从 Siegel 盘构造 Herman 环,现简单介绍构造方法如下:若 f 有一个不变的 Siegel 盘,以 Siegel 盘的一条不变曲线为边界,在 Siegel 盘内挖去一个拓扑圆 D,作$\hat{\mathscr{C}}\backslash D$ 的一个拷贝,这两者以不变曲线对应粘合,得到一个拓扑球面 S,对应地在 S 上也有由 f 合成的分支覆盖 F,则 S 等价于$\hat{\mathscr{C}}$,而 F 拟共形共轭于一个有理函数,它拥有一个 Herman 环.由此,可以证明定理 7.9.

定理 7.9 设 θ 是无理数,则下面两个条件等价:

1) 存在有理函数具有以 θ 为旋转数的 Herman 环;

2) 存在有理函数具有以 θ 为旋转数的 Siegel 盘.

§7.4 多项式的耦合

多项式的耦合是用多项式来构造有理函数的一种拓扑手术,它是建立在 Thurston 理论上的,利用它我们可以通过多项式的动力学性质来了解一些有理函数的动力学性质.为此,我们首先简要介绍 Thurston 的理论,其中心结果是 Thurston 定理.

设 $F: S^2 \mapsto S^2$ 是球面到自身的分支覆盖,C 是 F 的分支点集,如果 $P_F=\bigcup_{n\geqslant 0} F^n(C)$ 是有限集,称 F 是临界有限的分支覆盖.

对于临界有限分支覆盖 $F: S^2 \mapsto S^2$,可以定义最小的分支函数

$$\nu: S^2 \mapsto \mathscr{N} \cup \{\infty\},$$

使得 $\nu|_{S^2\setminus P_F}=1$，而当 $x\in P_F$ 时，$\nu(x)$ 是 $\nu(y)\circ\deg_y F$ 的最小公倍数．这里 $y\in F^{-1}(x)$，$\deg_y F$ 是 F 在 y 的局部映射度．如果 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个循环（周期轨道），则 $\nu(x_1)=\nu(x_2)=\cdots=\nu(x_n)$，且当这个循环含有临界点时，$\nu(x_1)=\nu(x_2)=\cdots=\nu(x_n)=\infty$．这样，$(S^2, \nu)$ 定义了一个关于 F 的分支点的 orbifold．同前面一样，(S^2, ν) 称为是双曲的，如果它的 Euler 示性数：

$$\chi(S^2, \nu)=2-\sum_{x\in P_F}\left(1-\frac{1}{\nu(x)}\right)<0.$$

定义 7.6（Thurston 等价） 设 F 和 G 是 S^2 到 S^2 上的临界有限分支覆盖，$\deg F=\deg G=d$，称 F 和 G 是（Thurston 意义下）等价的，如果存在 S^2 到 S^2 上的同胚 θ 和 θ'，使得 $\theta(P_F)=\theta'(P_F)=P_G$，$\theta$ 和 θ' 相对于 P_F 是合痕的，而且下图中的交换成立，即 $\theta'\circ F=G\circ\theta$.

$$\begin{array}{ccc}
(S^2, P_F) & \xrightarrow{F} & (S^2, P_F) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\theta'} \\
(S^2, P_G) & \xrightarrow{G} & (S^2, P_G)
\end{array}$$

称简单闭曲线 $\gamma\subset S^2\setminus P_F$ 是非边缘的，如果 $S^2\setminus\gamma$ 的每个分支至少含有 P_F 中的两点；称曲线族 $\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ 是多重曲线，如果每个 γ_i 是非边缘的，且在 $S^2\setminus P_F$ 内两两不同伦．对于 Γ，定义相关矩阵

$$F_\Gamma=(f_{ij})_{n\times n}$$

如下：如果 $F^{-1}(\gamma_j)$ 的每个分支都不同伦于 γ_i，则 $f_{ij}=0$；如果 $F^{-1}(\gamma_j)$ 的分支 $\delta_{1j}, \delta_{2j}, \cdots, \delta_{kj}$ 同伦于 γ_i，则 $f_{ij}=\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{d_p}$，其中 $d_p=\deg F|_{\delta_{p,j}}$.

如果对于多重曲线 $\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ 中的每个 γ_j，$F^{-1}(\gamma_j)$ 的每个分支都是非边缘的且同伦于 Γ 中的一条曲线，则称 Γ 是 F 不变的．

1982 年，Thurston 证明下述定理．

定理 7.10(Thurston 定理) 设 $F: S^2 \to S^2$ 是临界有限的分支覆盖,(S^2, ν)是双曲的 orbifold,则 F 等价于有理函数(Thurston 意义下)的充要条件是不存在 F-不变的多重曲线 Γ,使得 $\lambda(F_\Gamma) \geqslant 1$. 这里,$\lambda(F_\Gamma)$是矩阵 F_Γ 的最大特征值.

证明参见文献[Thu, DH2].

一般说来,Thurston 定理中的条件很难验证,1986 年 Levy 在其博士论文中对二次分支覆盖给出了一个简单的判据.

定义 7.7 设 $F: S^2 \mapsto S^2$ 是度为 d 的分支覆盖,一个多重曲线 $\hat{\Gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s\}$ 称为是一个 Levy 循环,如果每个 $F^{-1}(\gamma_j)$包含一个分支 δ_j 在 $S^2 \backslash P_F$ 内同伦于 $\gamma_{j-1}(\gamma_0 = \gamma_s)$,且 $\deg F|_{\delta_j} = 1$. 这里,矩阵 $F_{\hat{\Gamma}} = (\hat{f}_{ij})_{s\times s}$ 有性质 $\hat{f}_{i,i+1} \geqslant 1 (1 \leqslant i < s)$ 以及 $\hat{f}_{s,1} \geqslant 1$.

引理 7.2 如果 F-不变多重曲线 $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ 含有 Levy 循环,则 $\lambda(F_\Gamma) \geqslant 1$.

证明 设 Γ 中含有 Levy 循环 $\hat{\Gamma} = \{\gamma_{s+1}, \cdots, \gamma_n\}$,则

$$F_\Gamma = \begin{pmatrix} F_{\Gamma \backslash \hat{\Gamma}} & 0 \\ B & F_{\hat{\Gamma}} \end{pmatrix},$$

故 $\lambda(F_\Gamma) = \max(\lambda(F_{\Gamma\backslash\hat{\Gamma}}), \lambda(F_{\hat{\Gamma}}))$.

在经典矩阵论中有下述结果:对于矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{n\times n}$,如果 $a_{ij} \geqslant b_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$,则 $\lambda(A) \geqslant \lambda(B)$.

作 $(n-s) \times (n-s)$ 矩阵

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

则有 $\hat{f}_{ij} \geqslant c_{ij} \geqslant 0$,因此 $\lambda(F_{\hat{\Gamma}}) \geqslant \lambda(C) = 1$,即得 $\lambda(F_\Gamma) \geqslant 1$. 证毕.

对度为 2 的临界有限分支覆盖,下面的定理给出了 Thurston 条件的简单判别.

定理 7.11 设 F 是度为 2 的临界有限分支覆盖，则存在 F-不变多重曲线 Γ 满足 $\lambda(F_\Gamma)\geqslant 1$ 的充要条件是 F 有 Levy 循环.

注 Shishikura 和谭蕾[ST]利用三次多项式的耦合构造了 S^2 到 S^2 上的三次临界有限覆盖 F，使得 F 存在满足 $\lambda(F_\Gamma)\geqslant 1$ 的不变多重曲线 Γ，但 Γ 没有 Levy 循环，这说明，Levy 定理对于度大于 2 的分支覆盖不成立.

下面定义多项式的耦合.

设 f 和 g 是度为 d 的临界有限多项式，$K(f)$和 $K(g)$是连通的，而且是局部连通的，由 Carathéodory 定理，

$$\psi_f:\hat{\mathscr{C}}\backslash\overline{\Delta}\mapsto\hat{\mathscr{C}}\backslash K(f),\ \psi_f^{-1}\circ f\circ\psi_f(z)=z^d,$$

和

$$\psi_g:\hat{\mathscr{C}}\backslash\overline{\Delta}\mapsto\hat{\mathscr{C}}\backslash K(g),\ \psi_g^{-1}\circ g\circ\psi_g(z)=z^d$$

可以延拓到边界 $\partial\Delta$ 上，它们的 Carathéodory 带为 $\gamma_f(t)=\psi_f(\mathrm{e}^{2\pi i t})$ 和 $\gamma_g(t)=\psi_g(\mathrm{e}^{2\pi i t})$. 现将 $K(f)$与 $K(g)$以方式 $\gamma_f(t)$与 $\gamma_g(-t)$粘合起来，得到曲面 $X=K(f)\cup K(g)/\gamma_f(t)\sim\gamma_g(-t)$. 记 $F=f\amalg g: X\mapsto X$ 是由 f 和 g 诱导的映射，即 $F|_{K(f)}=f,\ F|_{K(g)}=g$.

定义 7.8 如果 X 同胚于球面 S^2，$F: X\mapsto X$ Thurston 等价于一个有理函数，称 f 和 g 是可耦合的.

设 W_0 是 Mandelbrot 集的中心分支，即 W_0 是包含 0 的双曲分支，记 $\mathscr{D}=\{c\in M\mid P_c(z)=z^2+c$ 是临界有限的$\}$，如果 $c'\in\mathscr{D}$，而 $c=0$，则 P_c 与 $P_{c'}$ 是可耦合的，而且 $P_c\amalg P_{c'}$等价于 $P_{c'}$.

1982 年 Douady 和 Hubbard 证明：$c,c'\in\mathscr{D}$，如果 c 和 c' 落在 $M\backslash\overline{W}_0$ 的共轭分支里，则 P_c 与 $P_{c'}$ 是不可耦合的，同时猜测：如果 c 和 c' 不在 $M\backslash\overline{W}_0$ 的共轭分支里，则 P_c 和 $P_{c'}$ 是可耦合的. 这个问题经过 Rees，谭蕾等的努力，最终被谭蕾所证明.

定理 7.12 设 $c,c'\in\mathscr{D}$，则 P_c 与 $P_{c'}$ 可耦合的充要条件是 c 和 c' 不在 $M\backslash\overline{W}_0$ 的共轭分支里.

定理 7.12 的证明见文献[Tan]. 关于耦合，还可参看文献[Ree].

参考文献

[DH1] A. Douady and J. H. Hubbard, On the dynamics for polynomial-like mappings. *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* 18 (1985) 287-343.

[Shi] M. Shishikura, On the quasiconformal surgery of rational functions. *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* 20 (1987) 1-29.

[Thu] W. Thurston, *On the conbinatories of iterated rational maps.* Preptint Princeton Univ. and Inst. Adv. Study 1985.

[DH2] A. douady and J. H. Hubbard, *A proof of Thurston's topological characterization of rational functions.* Preptint. Inst. Mittag-Leffler. Report. (2) 1985.

[Lev] S. Levy, *Critically finite rational maps.* Ph. D. Thesis. Princeton Univ. Princeton. USA 1985.

[Ree] M. Rees, *Realization of matings of polynomials as rational maps of degree two.* Preprint 1986.

[Tan] Tan Lei, Matings of quadratic polynomials. *Erg. Th. and Dyn. Sys.* 12 (1992) 589-620.

[ST] M. Shishikura and Tan Lei, *A family of cubic rational maps and matings of cubic polynomials.* Preprint of Max-Plank-Mat. fur Math. Bonn, Germany 88-50 (1988).

第八章　整函数及亚纯函数的动力学

在以上各章中，我们研究了有理函数的动力学性质，即复球面$\hat{\mathscr{C}}$的解析自映射的动力学性质. 这一章我们介绍复平面$\mathscr{C}$的解析自映射的动力学性质，即整函数的动力学性质. 整函数迭代理论的研究开始于1926年P. Fatou的工作. 后来，直到80年代初主要是I. N. Baker继续了这方面的研究. 80年代以来，随着有理函数动力系统理论的深入研究，整函数的迭代动力学理论迅速吸引了许多人的研究兴趣. 近年来出现了许多深刻的研究成果，研究方法也变得丰富多彩. 本章将介绍整函数迭代的基本性质，Fatou集和Julia集的基本结构、游荡域的存在性、有限型整函数的动力学性质以及近年来受到广泛研究的函数族λe^z的动力学性质. 本章最后一节还将简要介绍近年来开始研究的亚纯函数的迭代.

§8.1　整函数动力学的基本性质

设$f(z)$为$\mathscr{C}$上的整函数，即$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}$的解析自映射. 我们把f的n次迭代记为$f^n(n=0, 1, 2, \cdots)$. 完全同有理函数一样，我们按f的轨道的性态可把复平面$\mathscr{C}$分为两个集合：Fatou集$F(f)$和Julia集$J(f)$. 它们在f下均是完全不变的，且$F(f)$为开集，$J(f)$为闭集，$\mathscr{C}=F(f)\cup J(f)$.

整函数的Julia集和Fatou集的许多性质同有理函数的性质一致，比如，Julia集是一个完全集等. 我们从逐个考察有理函数的Julia集的基本性质的证明可见，Julia集的非空性和Julia集为排斥周期点的闭包这两个性质在证法上不能简单移植到超越整函数的情况，而其他基

本性质大都可以连同证法移植过来，这里不再一一详述.

定理 8.1 设 f 为超越整函数，则 $J(f) \neq \varnothing$.

为了证明这个定理，我们先介绍一个引理. 设 $f(z)$ 有幂级数表示 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n (|z| < \infty)$，由于 f 在$\mathscr{C}$上解析，故任取 $r > 0$，当 $n \to \infty$ 时，$|c_n| r^n \to 0$，从而 $|c_n| r^n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 中有一个达到最大，称为极大项；若同时有许多项达到最大值，则把最后一项称为极大项. 极大项所对应的指标 n 称为 f 的中心指标. 以下记中心指标为 $N(r)$，易见 $N(r) \to \infty (r \to \infty)$. 再记

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad (r > 0).$$

引理 8.1[Va] 设 $f(z)$ 为超越整函数，$\alpha > \frac{1}{2}$，在大圆 $|z| = r$ 上取一点 $w(r)$，满足 $M(r) = |f(w(r))|$，如果

$$|z - w(r)| < r(N(r))^{-\alpha}, \tag{8.1}$$

则

$$f(z) = \left(\frac{z}{w(r)}\right)^{N(r)} f(w(r))(1 + \varepsilon), \tag{8.2}$$

这里 $\varepsilon = \varepsilon(r, z)$，且当 $r \to \infty$ 时，ε 关于 z 一致趋于 0，至多除去 r 的一个例外集合 E，E 仅依赖于 f 和 α，且 E 的对数测度有穷，即

$$\ln E = \int_E \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty.$$

下面我们来证明定理 8.1. 首先定义

$$I(f) = \{z \in \mathscr{C} \mid f^n(z) \to \infty (n \to \infty)\},$$

易见我们只要证明 $I(f) \neq \varnothing$ 且$\mathscr{C} \backslash I(f) \neq \varnothing$，即可完成定理 8.1 的证明. 首先证明 $I(f) \neq \varnothing$.

考虑引理 8.1，选取 $r_1 > 2$ 且 $r_1 \notin E$，并令 r_1 充分大，使得

$$M(r) > 4r,\ r \geqslant r_1;$$

$$|\log(1+\varepsilon)| < 1,\ r \geqslant r_1,\ r \notin E, \tag{8.3}$$

$$\ln(E \cap [r_1, \infty)) < 1; \tag{8.4}$$

$$N(r_1) > 10^4.$$

为简便计,把引理 8.1 中的 $w(r_1)$记为 w_1,考虑区域:

$$C'_1 = \{z \in \mathscr{C} \mid |\log|z/w_1|| < 5/N(r_1),\ |\arg z/w_1| < 5/N(r_1)\}.$$

由于映射

$$z \mapsto N(r_1)(\log z - \log w_1) + \log f(w_1)$$

把 C'_1 单叶映射为如下方形区域:

$$\{\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta \mid |\xi - \log|f(w_1)|| < 5,\ |\eta - \arg f(w_1)| < 5\},$$

由(8.2)式、(8.3)式及 Rouché 定理可证明:存在区域 $C_1 \subset C'_1$,函数 $\log f(z)$把 C_1 单叶映射为如下方形区域:

$$Q = \{\zeta \mid |\xi - \log|f(w_1)|| < 4,\ |\eta - \arg f(w_1)| < 4\},$$

从而 C_1 的像 $f(C_1)$包含如下环域:

$$A_2 = \{z \mid \mathrm{e}^{-4}M(r_1) < |z| < \mathrm{e}^4 M(r_1)\}.$$

又由(8.4)式,我们可见存在 $r_2 \notin E$,使得

$$\frac{1}{2}M(r_1) < r_2 < 2M(r_1).$$

同样记 $w(r_2) = w_2$,继续可见

$$C'_2 = \{z \mid |\log|z/w_2|| < 5/N(r_2),\ |\arg z/w_2| < 5/N(r_2)\}$$

含于环域 A_2 内.

继续上述构造步骤,我们可以得到一串区域:

$$C_{j+1} \subset f(C_j),\ C_j \to \infty,$$

及 f^{-1}的一个分支,使得

$$\overline{f^{-1}(C_{j+1})} \subset C_j (j = 1, 2, 3, \cdots).$$

记 f^{-j}为 f^{-1}的 j 次迭代, $B_j = f^{-j}(C_{j+1})$, 我们有

$$\overline{B}_{j+1} \subset B_j (j = 1, 2, \cdots),$$

故

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \neq \varnothing.$$

易见 $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \subset I(f)$, 从而 $I(f) \neq \varnothing$.

再证明 $\mathscr{C} \backslash I(f) \neq \varnothing$. 事实上,只要证明 $f^2(z)$存在不动点即可.如若不然,则 f 和 f^2 均不存在不动点,故

$$F(z) = \frac{f(z) - z}{f(f(z)) - z}$$

为一整函数,它不取值 0 和 1,由 Picard 定理,$F(z)$必为常数,记为 c,所以 $c \neq 0, 1$, 从而

$$c(f(f(z)) - z) = f(z) - z,$$

两边求导得

$$f'(z)[cf'(f(z)) - 1] = c - 1 \neq 0,$$

所以整函数 f' 不取值 0 和$\frac{1}{c}$,由 Picard 定理,f' 只能为常数,这与 f 的超越性矛盾,从而 f^2 必有不动点,故 $\mathscr{C} \backslash I(f) \neq \varnothing$. 证毕.

注 上述证法中 $I(f)$的非空性的论证取材于 Eremenko 的论文,在该文中他还证明了 $\partial I(f) = J(f)$ 等结论,有兴趣的读者可参考 Eremenko 的论文[Er].

Fatou 在建立整函数迭代的基本理论时遇到了一个很大的困难,即无法证明 Julia 集是排斥周期点的闭包.这一结论直到 1968 年才被 Baker 证明.在证明中,Baker 使用了 Ahlfors 覆盖曲面理论中的一个深刻结果,通常称之为 Ahlfors 三岛定理,现叙述如下.

引理 8.2 设 E_1, E_2 和 E_3 为三个有界的 Jordan 区域,且 $\overline{E}_j$ $(j=1,2,3)$ 互不相交,$r>0$ 为一常数,则存在一个常数 c(仅与 E_1, E_2, E_3 和 r 有关),使得对于任意 $U_r=\{z\,|\,|z|<r\}$ 上的解析函数 $f(z)$,只要

$$\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2}>c,$$

就一定存在 U_r 中的一个区域 D, f 把 $\overline{D}$ 单叶地映射为 $\overline{E}_j(j=1,2,3)$ 中的一个.

下面介绍 Baker 的结果.

定理 8.2 设 f 为超越整函数,则排斥周期点在 $J(f)$上稠密.

证明 设 V 为任一开集,且 $V\cap J(f)\neq\varnothing$,因为 $J(f)$是完全集,所以存在三个不同点 z_1, z_2, $z_3\in J(f)\cap V$. 作三个互不相交的圆盘:

$$E_j=B(z_j,2r)\subset V\quad(j=1,2,3),$$

由于在 $J(f)$上$\{f^n\}$不正规,故当 $n\to\infty$时,在 z_j 的邻域上 f^n 的球面导数

$$\frac{|(f^n)'|}{1+|f^n|^2}$$

无界,从而,存在点 $z'_j\in B(z_j,r)$ 以及自然数 m_j,使得

$$\left(\frac{|(f^{m_j})'|}{1+|f^{m_j}|^2}\right)(z'_j)>c,$$

这里 c 为引理 8.2 中的常数. 由引理 8.2 可知,存在 D_j,使得

$$\overline{D}_j\subset B(z'_j,r),$$

且每个 D_j 被 f^{m_j}单叶地映射为 $E_k(k=1,2,3)$ 中的一个,故存在 m 和 k,使得 f^m 把某个区域 $D\subset D_k$ 单叶地映射为 E_k. 因为 $\overline{D}\subset E_k$, 故 f^m 的反函数在 $\overline{D}$ 上有吸引不动点,从而 f^m 有排斥不动点在 $D\subset V$ 中. 而由 V 的任意性便知,排斥周期点在 $J(f)$上稠密. 证毕.

§8.2 关于 Fatou 集的分支

§8.2.1 多连通区域的游荡性

我们知道,任何多项式 P 均以∞为超吸引不动点,故其 Fatou 集 $F(P)$总包含一个无界不变分支$D(\infty)$. 假如我们把 P 视为$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}$的解析映射,则$D(\infty)$是多连通的,就是说,多项式 P 存在一个多连通的不变域. 然而,对于超越整函数 f,这种情况不会发生. 超越整函数的 Fatou 集可能有无穷多个无界分支,也可能根本没有无界分支,但多项式的 Fatou 集有且仅有一个无界分支. 超越整函数的 Fatou 集的无界分支均是单连通的,有界分支可能是多连通的,而多连通 Fatou 分支全是游荡分支.

设 γ 为$\mathscr{C}$上的一条曲线,我们把 γ 关于一点 $a\in\mathscr{C}$ 的绕数记为 $\mathrm{ind}_a\gamma$. 首先有下述引理.

引理 8.3 设 f 为超越整函数,D 为 $F(f)$的一个多连通分支,γ 为 D 上不同伦于一点的 Jordan 闭曲线,则

1) 在 D 的任一紧子集上,f^n 一致趋于∞;

2) 当 n 充分大时,$\mathrm{ind}_0(f^n(\gamma))>0$.

证明 1) 假如存在 D 的一个紧子集,f^n 在其上不一致趋于∞,由于$\{f^n\}$在 D 上正规,故$\{f^n\}$存在某一子序列$\{f^{n_j}\}$,其在 D 的紧子集上一致有界,从而存在 $M>0$,使得

$$|f^{n_j}(z)|\leqslant M, z\in\gamma.$$

记 γ 的内部区域为 G,则易见在 G 的任一个紧子集 G_0 上,存在 $c>0$,使得

$$|(f^{n_j})'(z)|\leqslant c, z\in G_0.$$

由于 G 包含 $J(f)$,上式与定理 8.2 矛盾,故 1)成立.

2) 假设存在子列$\{n_j\}$,使 $\mathrm{ind}_0(f^{n_j}(\gamma))=0$, 从而 f^{n_j}在 γ 的内部没

有零点，由极小模定理可知，在 γ 内部 f^{n_k} 一定趋于∞，这与定理 8.2 矛盾，从而引理 8.3 得证. 证毕.

注 在上述引理的条件下，我们事实上可以证明 $\mathrm{ind}_0(f^n(\gamma)) \to \infty (n \to \infty)$，读者不难补出详细的证明过程.

引理 8.4 设 f 为整函数，Γ 为一通向∞的曲线，f 在 Γ 上有界，则 $F(f)$的分支全是单连通的.

证明 假如 $F(f)$存在多连通的分支 D，考虑 D 上一条不同伦于一点的 Jordan 闭曲线 γ. 由引理 8.3 可知，当 n 充分大时 $f^n(\gamma)$必与 Γ 相交. 取 $z_n \in f^n(\gamma) \cap \Gamma$，则

$$f(z_n) \in f^{n+1}(\gamma) \to \infty (n \to \infty),$$

这与 f 在 Γ 上有界矛盾，从而引理 8.4 得证. 证毕.

我们还需要下述结果. 它可以从著名的 Harnack 不等式直接导出(参见文献[Ha]).

引理 8.5 设 V 为任一区域，K 为 V 的任一紧集，如果 h 是 V 上的一个正值调和函数，则任取 $z_1, z_2 \in K$，

$$h(z_1) \leqslant ch(z_2),$$

其中 c 是一个仅与 V 和 K 有关的正常数.

下面介绍 Baker 的一个结果.

定理 8.3 设 f 为超越整函数，则 $F(f)$的每一个无界分支是单连通的.

证明 假如存在 $F(f)$的一个无界的多连通区域 D，设 γ_0 为 D 上的不同伦于一点的 Jordan 闭曲线，由引理 8.3 知，对于充分大的 n，曲线 $\gamma_n = f^n(\gamma_0)$ 必与 D 相交，从而 γ_n 全属于 D，且 D 是 f^n 的不变区域.

设 V 是包含 γ_0 和 γ_1 的一个有界区域，且设

$$\overline{V} \subset D,$$

由引理 8.3 知，当 n 充分大时，有

$$|f^n(z)| > 1, \; z \in V.$$

在区域 V 上，对调和函数

$$h_n(z) = \ln|f^n(z)|$$

应用引理 8.5，我们导出：对所有 $z_j \in \gamma_j (j = 0, 1)$，

$$|f^n(z_1)| \leqslant |f^n(z_0)|^c, \ n > n_0, \tag{8.5}$$

这里 c 不依赖于 n.

另一方面，因为 $\gamma_n \to \infty$, $\mathrm{ind}_0\gamma_n > 0$，且 f 是超越的，故我们有：对于充分大的 n，存在点 $\zeta \in \gamma_n$，使得

$$|f(\zeta)| > |\zeta|^c.$$

设 $\zeta = f^n(z_0)$，其中 $z_0 \in \gamma_0$, $f(z_0) = z_1 \in \gamma_1$，则

$$|f^n(z_1)| = |f(\zeta)| > |\zeta|^c = |f^n(z_0)|^c.$$

这与(8.1)式矛盾，从而定理 8.3 得证. 证毕.

推论 8.1 设 f 为超越整函数，如果 $F(f)$有一个无界分支 D，则 $F(f)$的所有分支全是单连通的.

证明 假如 $F(f)$存在一个多连通分支 V，由定理 8.3 可知，V 是有界的. 又由引理 8.3 可知，对于充分大的 n，

$$f^n(V) \cap D \neq \varnothing,$$

从此可见 $f^n(V) = D$，这是矛盾的，从而推论 8.1 得证. 证毕.

推论 8.2 设 f 为超越整函数，则 $J(f)$不能是完全不连通的.

事实上，推论 8.2 可从 $F(f)$的多连通分支必有界的结论直接导出.

定理 8.4 设 f 为超越整函数，则它的非游荡分支是单连通的.

证明 设 D 为 $F(f)$的任一非游荡分支，如果 D 无界，则由定理 8.3 可知，D 是单连通的；如果 D 有界，则由 D 的非游荡性得到 f^n 在 D 内一致有界，且由引理 8.3 可知，D 是单连通的. 证毕.

§8.2.2 Fatou 集周期分支的分类

关于有理函数的 Fatou 集我们已经知道其周期分支为以下五类：

超吸引周期分支、吸引周期分支、抛物周期分支、Siegel 盘和 Herman 环. 对于超越整函数,我们同样可给出超吸引周期分支、吸引周期分支、抛物周期分支以及 Siegel 盘的定义. 根据定理 8.4,类似于多项式,超越整函数没有 Herman 环. 然而,对于超越整函数,有一种新的周期分支可能出现,它通常称之为 Baker 分支. 设 D 为整函数 f 的 Fatou 集 $F(f)$的一个分支,如果在 D 上,$f^n(z) \to \infty (n \to \infty)$,则称 D 为 Baker 分支. 一个周期分支如果是 Baker 分支,有时也称之为本性抛物分支. 事实上,把∞视为该 Baker 分支的一个边界点,可见此称呼是合理的.

用完全类似于有理函数的方法,我们立刻可得下述分类定理.

定理 8.5(分类定理) 设 f 为超越整函数,则 $F(f)$的任一周期分支为下列五者之一:超吸引周期分支、吸引周期分支、抛物周期分支、Siegel 盘,以及 Baker 分支.

对于整函数 f, $a \in \mathscr{C}$ 称为 f 的非奇点,如果存在 a 的一个邻域 V,使得

$$f: f^{-1}(V) \mapsto V$$

为非分支覆盖. 记 f 的所有奇点的集合为 Σ_f,由整函数的基本理论知,对于非线性整函数,$\Sigma_f \neq \varnothing$. 事实上,$\Sigma_f$ 可能是一个无穷集合,甚至于为整个复平面$\mathscr{C}$. 进一步,f 的奇点可分为以下三类:

1) f 的临界值;

2) f 的渐近值;

3) 临界值和渐近值集合的极限值.

关于整函数奇点的更深入的知识可从其他有关整函数理论的书中查到,这里不再详述.

完全同有理函数的情况,我们可证明定理 8.6.

定理 8.6 对于超越整函数,任一超吸引、吸引、抛物分支的循环中包含至少一个奇点,任一 Siegel 盘的边界属于所有奇点前向轨道的闭包.

注 Baker 分支循环中可能没有奇点(参见文献[He, EL]).

§8.3 游荡分支的存在性

我们从 Sullivan 的著名定理中已经知道：度大于 1 的有理函数没有游荡分支. 然而，超越整函数可能有游荡分支. 历史上，第一个具有游荡分支的超越整函数的例子是 Baker 于 1976 年构造的，后来 Baker，Herman，Eremenko 和 Luybich 等人构造了许多这方面的例子. 这里主要介绍 Baker 和 Herman 的工作.

§8.3.1 多连通游荡分支的构造

引理 8.6 存在由下述典型乘积定义的整函数

$$g(z) = cz^2 \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{r_n}\right),\ 1 < r_1 < r_2 < \cdots < \cdots,\ c > 0, \tag{8.6}$$

它满足

$$|g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| < \frac{1}{4},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{8.7}$$

$$r_{n+1} < g(r_n) < 2r_{n+1},\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots. \tag{8.8}$$

证明 选取 r_1 和 $c > 0$，使得

$$c\exp\left(\frac{2}{r_1}\right) < \frac{1}{4};\ cr_1 > 1;\ r_1 > 1. \tag{8.9}$$

归纳地定义序列$\{r_n\}$如下：

$$r_2 = cr_1^2\left(1 + \frac{r_1}{r_1}\right) = 2cr_1^2,$$

$$r_{n+1} = cr_n^2\left(1 + \frac{r_n}{r_1}\right)\left(1 + \frac{r_n}{r_2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{r_n}{r_n}\right),\ n = 1,\ 2,\ \cdots. \tag{8.10}$$

由(8.9)式得到 $r_2 = 2cr_1 \cdot r_1 > 2r_1$. 再看(8.10)式，因为

$$r_{n+1} \geqslant 2cr_n^2 > 2cr_1r_n > 2r_n,$$

故 $r_{n+1} > 2r_n (n = 1, 2, \cdots)$，从而

$$1 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < r_{n+1} < \cdots.$$

进一步有

$$r_n > 2^{n-1}r_1,\ n = 2, 3, \cdots;\ r_{n+k} > 2^k r_n,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{8.11}$$

这就说明(8.6)式为整函数. 由(8.6)式、(8.11)式和(8.9)式得

$$\begin{aligned} |g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| &\leqslant c \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{r_n}\right) \\ &< c \prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2^{1-n}r_1^{-1}) \\ &< c\exp\left(\frac{2}{r_1}\right) < \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

此即(8.7)式成立.

进一步，有

$$r_{n+1} = cr_n^2 \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{r_n}{r_k}\right) < g(r_n) = r_{n+1} \prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r_n}{r_k}\right).$$

然而由(8.11)式的第二部分，有

$$\prod_{n+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r_n}{r_k}\right) < \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = 2.$$

上两式即给出了(8.8)式. 证毕.

引理 8.7 设 $g(z)$ 为引理 8.6 中定义的整函数，则

$$g\left(r_n^{\frac{1}{2}}\right) < r_{n+1}^{\frac{1}{2}},\ n = 1, 2, \cdots; \tag{8.12}$$

$$\frac{1}{4}g(r_n^2) > r_{n+1}^2,\ n = 1, 2, \cdots. \tag{8.13}$$

证明 首先注意 $g(r)$ 为 $g(z)$ 在 $|z| = r$ 上的最大模，对

$$V(s) = \log(g(e^s))$$

应用 Hadamard 凸性定理，当 $s > 0$ 时有

$$V(2s) - V(0) > 2\{V(s) - V(0)\},$$

即

$$V(2s) > 2V(s) - V(0),$$

从而有

$$g(r^2) > \frac{g(r)^2}{g(1)} > 4g(r)^2. \tag{8.14}$$

记 $r = r_n^{1/2}$，应用(8.8)式得

$$4g(r_n^{1/2})^2 < g(r_n) < 2r_{n+1},$$

这就导出(8.12)式. 在(8.14)式中记 $r = r_n$，应用(8.8)式得

$$g(r_n^2) > 4g(r_n)^2 > 4r_{n+1}^2,$$

这就导出(8.13)式. 证毕.

以下记环域：

$$A_n = \{z \in \mathscr{C} \mid r_n^2 < |z| < r_{n+1}^{1/2}\},\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

引理 8.8 存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，映射 $z \to g(z)$ 把环域 A_n 映为 A_{n+1}，并且 $g_n(z)$ 在 A_n 上一致趋于∞.

证明 由(8.10)式易见，对任意固定的 m，有

$$r_{n+1}/r_n^m \to \infty (n \to \infty),$$

从而当 n 充分大时，A_n 均非空. 进一步，如果 $r_n > 4$，$r_{n+1} > 16$，则环域 A_n 位于下述环域中：

$$B_n = \left\{z \in \mathscr{C} \,\middle|\, 4r_n < |z| < \frac{1}{4}r_{n+1}\right\}.$$

由(8.12)式，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 且 $z \in A_n$ 时，

$$|g(z)| \leqslant g(|z|) < g(r_{n+1}^{1/2}) < r_{n+2}^{1/2}. \tag{8.15}$$

由(8.10)式得到

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} > cr_n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

从而，当 n 充分大时，区间 $b_n = \left\{x \in \mathscr{R} \middle| 4r_n < x < \frac{1}{4}r_{n+1}\right\}$ 非空. 注意到

$$\log(1+x) < x,\ x > 0,$$

$$-\log(1-x) < 2x,\ 0 < x < \frac{1}{2},$$

故

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) < 3x,\ 0 < x < \frac{1}{2}, \tag{8.16}$$

$$\log\left|\frac{g(r)}{g(-r)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \sum_{k=1}^{n-1} I_k + I_n + I_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} I_k, \tag{8.17}$$

其中

$$I_n = \log\left|\frac{1+\dfrac{r}{r_n}}{1-\dfrac{r}{r_n}}\right|. \tag{8.18}$$

对于 b_n 中的 r 以及 $k \leqslant n-1$，我们有

$$0 < \frac{r_k}{r} < \frac{r_k}{4r_n} < \frac{1}{8},$$

并且由(8.18)式和(8.16)式得

$$0 < I_k = \log\left|\frac{1+\dfrac{r_k}{r}}{1-\dfrac{r_k}{r}}\right| < 3\frac{r_k}{r} < \frac{3r_k}{4r_n},$$

所以，有

$$\sum_{k=1}^{n-1} I_k < \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r_k}{r_n} = \frac{3}{4}\frac{r_{n-1}}{r_n}\left\{1 + \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} + \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}\cdot\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} + \cdots\right\}$$

$$< \frac{3}{4}\frac{r_{n-1}}{r_n}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right\} < \frac{3}{2}\frac{r_{n-1}}{r_n}. \tag{8.19}$$

对于 b_n 中的 r 以及 $k \geqslant n+2$，我们有

$$0 < \frac{r}{r_k} < \frac{r_{n+1}}{4r_{n+2}} < \frac{1}{8},$$

并且由(8.18)式和(8.16)式得

$$0 < I_k = \log\left|\frac{1+\frac{r}{r_k}}{1-\frac{r}{r_k}}\right| < \frac{3r}{r_k} < \frac{3}{4}\frac{r_{n+1}}{r_k},$$

所以，有

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} I_k < \frac{3}{4}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{r_n+1}{r_k} < \frac{3}{4}\sum_{k+n=2}^{\infty}\frac{r_{n+1}}{r_{n+2}}\cdot 2^{n+2-k} = \frac{3}{2}\frac{r_{n+1}}{r_{n+2}}. \tag{8.20}$$

对于 b_n 中的 r，由(8.17)式、(8.19)式及(8.20)式得

$$\log\left|\frac{g(r)}{g(-r)}\right| < \frac{3}{2}\frac{r_{n-1}}{r_n} + \frac{3}{2}\frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} + \log\left|\frac{1+\frac{r_n}{r}}{1-\frac{r_n}{r}}\right| + \log\left|\frac{1+\frac{r}{r_{n+1}}}{1-\frac{r}{r_{n+1}}}\right|$$

$$< \frac{3}{4}\frac{r_{n-1}}{r_n} + \frac{3}{2}\frac{r_{n+1}}{r_{n+2}} + 2\log\frac{5}{3}. \tag{8.21}$$

但是，由于 $r_{n+1}/r_n \to \infty (n \to \infty)$，从而当 n 充分大时，(8.21)式的右端小于 $\log 4$，这就证明了对充分大的 n，有

$$g(r) < 4|g(-r)|,\ r \in b_n.$$

由此式及(8.13)式，并计及 $A_n \subset B_n$，我们有：当 $z \in A_n$ 时，

$$|g(z)| \geqslant g(-|z|) > \frac{1}{4}g(|z|) > \frac{1}{4}g(r_n^2) > r_{n+1}^2. \tag{8.22}$$

结合(8.15)式和(8.22)式得：$w = g(z)$ 把 A_n 映射到 A_{n+1}，从而 $w = g^p(z)$ 把 A_n 映射到 A_{n+p}. 由于 A_{n+p} 距离 $z = 0$ 的最小距离为 r_{n+p}^2，它随 $p \to \infty$ 而趋于∞，所以在 A_n 上 $g(z)$一致趋于∞. 证毕.

定理 8.7 对引理 8.6 中的超越整函数 $g(z)$，$F(g)$存在多连通的游荡分支.

证明 由(8.7)式得到在单位圆盘 $|z| \leqslant 1$ 上，有

$$|g(z)| < \frac{1}{4}|z|,$$

由 Schwartz 引理可知

$$|g^n(z)| < 4^{-n}|z|,$$

从而在 $|z| = 1$ 上，$\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z) = 0$（一致地）. 而由引理 8.8 可知，当 $z \in A_n$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z) = \infty(\text{一致地}),$$

故 A_n 必属于 $F(g)$的一个多连通分支 G，其中 $|z| = 1$ 在$\mathscr{C}\backslash G$ 的有界分支上. 由定理 8.4 可知，G 为游荡域. 证毕.

§8.3.2 单连通游荡分支的构造

考虑映射

$$g: z \mapsto z - 1 + \mathrm{e}^{-z},$$

容易验证 $g(z)$以 $z_n = 2\pi i n$ 为超吸引不动点. 记 z_n 的直接吸引域为 D_n，由定理 8.4 可知，所有 D_n 全是单连通的.

易见 g 和映射 $T: z \mapsto z + 2\pi\mathrm{i}$ 可交换，且 g 的 Fatou 集 $F(g)$在 T 下是不变的，$T(D_n) = D_{n+1}$. 现在考虑映射

$$f: z \mapsto g(z) + 2\pi\mathrm{i}.$$

事实上，$f(z) = T(g(z))$，我们有

$$f(D_n) = D_{n+1}.$$

以下证明：$J(f)=J(g)$. 设 z_0 为 g 的任意排斥周期点，p 为其阶，λ 为其特征值，则

$$f^{pn}(z)=T^{pn}(g^{pn}(z))=T^{pn}(z)$$
$$=z+(2\pi\mathrm{i})pn=O(n),\ n\to\infty,$$

且

$$(f^{pn})'(z)=(T^{pn})'(z)(g^{pn})'(z)=\lambda^n,$$

从而，关于球面导数我们有

$$|(f^{pn})'(z)|/(1+|f^{pn}(z)|^2)\to\infty,\ n\to\infty,$$

所以，对于此 z_0，$\{f^m(z)\}$ 在 z_0 的邻域内不正规，即 $J(f)\ni z_0$，由定理 8.1 得到

$$J(g)\subset J(f).$$

同理可证 $J(g)\supset J(f)$，故 D_n 全为 $F(f)$的分支. 由 $f(D_n)=D_{n+1}$ 可知 D_n 为 f 的游荡分支.

以上我们构造了两个具有游荡分支的整函数，第一个的增长速度很慢，第二个具有级 1. 这里我们将证明：对于任何值 $\rho\in[1,\infty]$，存在 ρ 级整函数，它具有单连通的游荡分支. 在以下讨论中，我们要涉及函数交换的有趣问题，即如果 $f(g)=g(f)$，那么要讨论 $J(f)$和 $J(g)$ 的关系问题. 对于有理函数，易证两者的 Julia 集是一致的. 但这一结论不能直接移植到超越整函数的情况. 以下研究一些特殊情况.

引理 8.9 设 f 和 g 为两个超越整函数，$f(g)=g(f)$，则

$$g(J(f))\subset J(f).$$

证明 由定理 8.2 可知，一点 $\alpha\in J(f)$ 的充要条件是 α 为 f 的排斥周期点的极限点. 然而，g 把 f 的任一周期为 p 的排斥周期点 β 映为 f 的另一周期为 p 的周期点 β'，且

$$(f^p)'(\beta)=(f^p)'(\beta'),$$

从而 $g(\beta)=\beta'\in J(f)$，即得 $g(J(f))\subset J(f)$. 证毕.

引理 8.10 设 f 和 g 为二超越函数，且 $f(g)=g(f)$，如果 $\alpha \in F(f)$，且存在子列 $n_k \to \infty$，使 f^{n_k} 在 $F(f)$ 的包含 α 在内的那个分支上具有有穷极限，则 $g(\alpha) \subset F(f)$.

证明 选取 α 的一个开邻域 U，使得 $\overline{U} \subset F(f)$. 因为 f^{n_k} 在 U 上具有有穷的极限函数，所以 $f^{n_k}(U)$ 位于同一个紧集上，在其上 g 为一致连续的. 从 f 和 g 的交换性可证明：我们可以选取 U 充分小，使得 $g(f^{n_k}(U)) = f^{n_k}(g(U))$ 均具有十分小的直径. 再由 Julia 集的局部齐性定理，$g(U) \subset F(f)$，故 $g(\alpha) \in F(f)$. 证毕.

引理 8.11 设 f 和 g 为二超越整函数，$f(g)=g(f)$，如果 $f = g + c$ (c 为某一复常数)，则 $J(f) = J(g)$.

证明 易见，只要证明 $g(F(f)) \subset F(f)$，再由引理 8.9 便得 $J(f) = J(g)$. 任取 $\alpha \in F(f)$ 以及 α 的充分小的邻域 U，使得 $\overline{U} \subset F(f)$，由引理 8.10 可知，我们只要考虑 f^n 在 U 上趋于∞的情形即可. 选取常数 $A > |c| + 1$. 则存在 n_0，使得在 U 上对一切 $n > n_0$ 有 $|f^n(z)| > A$，从而

$$|f(z)| > A,\ z \in f^n(U),\ n > n_0.$$

假如 $g(\alpha) \notin F(f)$，则在 $g(U)$上，对任意 m_0，$\{f^m \mid m > m_0\}$ 取任何值，至多有一个例外点，故存在 $\xi \in U$，$t = g(\xi)$，使得对某个 $m > n_0$ 有

$$|f^m(t)| = |f^m(g(\xi))| = |g(f^m(\xi))| < 1,$$

所以 $\eta = f^m(\xi) \in f^m(U)$ 且 $|g(\eta)| < 1$，但是 $|f(\eta)| > A$，故

$$|c| = |f(\eta) - g(\eta)| > A - 1,$$

矛盾，从而引理 8.11 得证. 证毕.

定理 8.8 任取值 $\rho \in [1, \infty]$，存在 ρ 级整函数 f，它具有单连通的游荡分支.

证明 记

$$f_j(z) = 2\pi \mathrm{i} j + z + (K(\mathrm{e}^z))^2,$$

其中 j 为整数，K 为整函数. 通过将下面交换图投影，可将$\mathscr{C}$视为

$\mathscr{C}\backslash\{0\}$ 的覆盖空间，$h(t)=t\exp(K^2(t))$. 易见 f_0 与 f_1 可交换，由引理8.11得 $J(f_0)=J(f_1)$. 又因为

$$f_0^n(z+2\pi\mathrm{i})=f_0^n(z)+2\pi\mathrm{i},$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{C} & \xrightarrow{f_j} & \mathscr{C} \\
{\scriptstyle \mathrm{e}^z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{e}^z} \\
\mathscr{C}\backslash\{0\} & \xrightarrow[h]{} & \mathscr{C}\backslash\{0\}
\end{array}$$

故 $J(f_0)$在平移 $2\pi\mathrm{i}$ 时不变. 选取 $K(z)$，使得 $K(t)=0$ 有无穷多个解 $t=\alpha_1,\alpha_2,\cdots$，所以 h 以每个 α_n 为不动点，因此其特征值 $h'(\alpha_n)=1$，且它们提升为一组不动点 $z_{n,k}=\beta_n+2\pi\mathrm{i}k$，其中 β_n 为 $\log\alpha_n$ 的一个确定值. 同样容易直接验证：对于这种形式的 z，$f_0(z)=z$ 且 $f'_0(z)=1$.

由周期分支的分类定理，$z_{n,k}$至少位于 Fatou 集 $F(f_0)$的某一个分支 $U_{n,k}$的边界上，f_0 把 $U_{n,k}$映射到自身，且当 $z\in U_{n,k}$ 时，有

$$f_0^n(z)\to z_{n,k},\ n\to\infty,$$

所以，当且仅当 $m=n$ 且 $i=j$ 时，才有 $U_{n,j}=U_{m,i}\neq\varnothing$. 我们可以选取分支 $U_{n,k}$，使得 $U_{n,k}+2\pi\mathrm{i}=U_{n,k+1}$.

取 $f=f_1$，则有

$$f(U_{n,k})\subset U_{n,k+1},$$

故 $U_{n,k}$为 f 的游荡分支. 由于 $U_{n,k}$是 f_0-不变的，由定理 8.4 可知，$U_{n,k}$是单连通的. 以下仅剩下要证明 f 具有指定增长速度.

设 $\rho\in(1,\infty)$，记

$$K(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a_j}\right),$$

其中 a_j 为一单调上升正数列，且 a_j 在 $\{z\,|\,|z|\leqslant r\}$ 中的个数 $n(r)$满足条件：

$$n(r)\sim\rho(\log r)^{\rho-1},\ r\to\infty,$$

从而平均计数函数 $N(r)$满足：

$$N(r)=\int_0^r \frac{n(t)}{t}\mathrm{d}t \sim (\log r)^{\rho},\ r\to\infty.$$

又由于最大模函数

$$M(r)=\max_{|z|=r}|K(z)|=K(r)$$

满足：

$$N(r)\leqslant \log M(r)\leqslant N(r)+Q(r),$$

其中

$$Q(r)=r\int_r^{\infty} t^{-2}n(t)\mathrm{d}t < 2r\int_r^{\infty}\rho t^{-2}(\log t)^{\rho-1}\mathrm{d}t$$

$$=2r\left[\frac{r}{\rho}(\log r)^{\rho-1}+\int_r^{\infty}\frac{\rho(\rho-1)}{t^2}(\log t)^{\rho-2}\mathrm{d}t\right],$$

因此

$$Q(r)(1-o(1)) < 2\rho(\log r)^{\rho-1}=o(N(r)),$$

且

$$\log M(r)\sim N(r)\sim (\log r)^{\rho},\ r\to\infty.$$

记 $K(\mathrm{e}^z)$的最大模函数为 $M_1(r)$，易见 $M_1(r)=K(\mathrm{e}^r)$，显然

$$\log M_1(r)\sim \log M(\mathrm{e}^r)\sim r^{\rho},\ r\to\infty,$$

从而，定理 8.8 当 $\rho\in(1,\infty)$ 时为真.

如果 $\rho=1$，我们选取 a_j，使 $n(r)$比 $\log r$ 的任何方幂都增长得慢，例如可使 $n(r)\sim \log\log r(r\to\infty)$，从此可导出

$$\log M_1(r)\sim r\log r,\ r\to\infty.$$

于是在 $\rho=1$ 时证明了定理 8.8. 如果 $\rho=\infty$，取

$$n(r)\sim (\log r)^{\log\log r},\ r\to\infty,$$

则得到定理 8.8 的结论. 证毕.

注 以上第一个和第三个例子是 Baker 构造的，第二个例子是 Herman 构造的. Eremenko 和 Luybich 曾构造具有游荡分支的整函数

f,它同时满足下述四个条件:

1) f 具有游荡分支,且在其上,所有 f^n 均单叶;

2) 每一个游荡分支的轨道具有无穷多个极限点;

3) f 具有无穷多个各种类型的周期,同时具有无穷多个满足 1)和 2)的游荡分支轨道;

4) $J(f) \neq \mathscr{C}$,但 $\text{mes}J(f) > 0$, 且

(i) $\text{mes}\{z \in J(f) \mid f^n(z) \to \infty,\ n \to \infty\} > 0$;

(ii) $\text{mes}\{z \in J(f) \mid \lim\limits_{n\to\infty} |f^n(z)| < \infty\} > 0$.

这里略去了详细的证明过程,有兴趣的读者可参阅他们的文章[EL, EL1].

§8.4 有限型整函数的动力学

通常我们称仅有有穷个奇点的整函数为有限型整函数,所有有限型整函数的集合记为 S. 我们还称奇点位于一个有界集上的整函数为有界型整函数,所有这种函数的集合记为 B. 易见 $S \subset B$. 进一步,如果整函数 f 仅有 q 个奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_q$,则称 $f \in S_q$,且 $a_1, a_2, \cdots, a_q$ 称为 f 的基本点. 易见 $S = \bigcup\limits_q S_q$. 多项式显然属于 S 族. S 族函数对复合算子是封闭的.

§8.4.1 Baker 分支的消失

设 $f \in B$ 为超越整函数,记

$$D(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\},$$

又设 f 的奇点集 $\Sigma_f \subset D(0, R/2)$,并记

$$A = \mathscr{C} \setminus \overline{D(0, R)},\ G = f^{-1}(A),$$

易证 G 的每一个分支 V 是一个单连通区域,它的边界是一条两端伸向 ∞ 的解析曲线,并且

$$f: V \mapsto A$$

是万有覆盖. 在 V 的边界上，$|f(z)| = R$，所以，由引理 8.4 便得如下命题.

命题 8.1 如果 $f \in B$ 为超越整函数，则 $F(f)$ 的所有分支全为单连通的.

选取 R 充分大，使得 $|f(0)| < R$，则 $0 \notin G$，且 $\exp: W \mapsto G$，关于集合 $U = \ln G$ 的任何分支 W 是一个共形同胚. 考虑半平面

$$H = \ln A = \{\xi \mid \mathrm{Re}\xi > \ln R\},$$

我们有下述交换图，此处 F 是 U 的任一连通分支到 H 上的共形同胚. F 的存在性可从这里易见：对于 U 的任一连通分支 W，$f \circ \exp: W \mapsto A$ 是万有覆盖. 我们称 F 是通过 f 的变量在∞的邻域内进行对数变换而得到. 类似的变量变换方法曾经被 Teichmüller 应用于值分布理论中.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & H \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

引理 8.12 $|F'(z)| \geqslant \frac{1}{4\pi}(\mathrm{Re}F(z) - \ln R)$.

证明 设 W 为 U 的一个连通分支，由于指数函数在 W 内单叶，故 W 不能包含长度为 2π 的垂直直线段. 又设

$$\Phi: H \mapsto W$$

为 F 的反函数，圆盘：

$$D(F(z), \mathrm{Re}F(z) - \ln R)$$

在 H 内，由 Koebe $\frac{1}{4}$定理，W 包含一个半径为

$$\left|\frac{1}{4}\Phi'(F(z))(\mathrm{Re}F(z) - \ln R)\right|$$

的圆盘，从而

$$\frac{1}{4}|\Phi'(F(z))||\mathrm{Re}F(z)-\ln R|\leqslant\pi,$$

从此便导出引理 8.12. 证毕.

定理 8.9 设 $f\in B$ 为超越整函数，如果 $z\in F(f)$，则 $\{f^m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ 不趋于∞.

证明 设 $z_0\in F(f)$ 的轨道 $\{z_m\}$ 趋于∞，则存在 $r>0$，使得 $\{f^m\}$ 在 $B_0=D(z_0,r)$ 上一致趋于∞，所以，至多除去有穷个 $B_m=f^m(B_0)$ 外，其他所有 B_m 均属于 G. 以下使用命题 8.1 中交换图的符号，无妨设所有 B_m 均在 G 中，设 C_0 是 $\ln B_0$ 的一个分支，并记

$$\exp C_m=B_m.$$

从而 $C_m\subset U$，且 $\mathrm{Re}F^m$ 在 C_0 内一致趋于 $+\infty$. 又设

$$\zeta_0\in C_0,\ \zeta_m=F^m(\zeta_0)\in C_m,$$

记中心在 ζ_m 且含于 C_m 的圆的半径的上确界为 d_m，由 Koebe $\frac{1}{4}$ 定理得

$$d_m\geqslant\frac{1}{4}|F'(\zeta_m)|,$$

计及 $\mathrm{Re}F(\zeta_m)\to+\infty$ 及引理 8.12 得

$$|F'(\zeta_m)|\to\infty,$$

故 $d_m\to\infty$. 而 $C_m\subset U$，且 U 不含长度为 2π 的垂直的直线段，矛盾，于是定理 8.9 得证. 证毕.

推论 8.3 设 $f\in B$ 为超越整函数，则 $F(f)$ 不含 Baker 分支.

§8.4.2 最终周期性定理

我们知道有理函数没有游荡分支，然而，在上一节中我们给出了许多具有游荡分支的整函数的例子. 一个自然的问题是：哪些整函数没有游荡分支？本节对有限型整函数证明了最终周期性定理. 这一结果分别由 Eremenko 和 Luybich，Baker 以及 Goldberg 和 Keen 独立得到.

由命题 8.1 可知，对有限型整函数，其 Fatou 集的分支全是单连通

的. 这样，完全同第三章中关于有理函数最终周期性定理的证明便可证得(参见吕以辇的文章[Lü]).

定理 8.10 设 $f \in S$ 为超越整函数，则 f 没有游荡分支.

从定理 8.5、定理 8.9，以及定理 8.10，我们便可完全给出有限型整函数的 Fatou 集上的动力学性态的完全描述. 事实上有下述定理.

定理 8.11 设 $f \in S$，则 Fatou 集 $F(f)$的任一分支的轨道最终要进入超吸引周期分支、吸引周期分支、抛物周期分支或者 Siegel 盘的循环.

作为上述定理的应用，我们有定理 8.12.

定理 8.12 设 $f \in S$ 为超越整函数，如果其基本点的轨道或是严格最终周期的，或是趋于∞的，则 $J(f) = \mathscr{C}$.

证明 假如$J(f) \neq \mathscr{C}$，则由定理 8.11，$F(f)$存在超吸引分支、吸引分支、抛物分支或者 Siegel 盘的循环. 前三者内必包含基本点的一条非严格最终周期的轨道，这与条件矛盾；后者的边界位于基本点的轨道的闭包中，但是，由条件可知，基本点的轨道的极限集是个有限集，矛盾. 从而证得定理 8.12. 证毕.

定理 8.12 是判断 Julia 集是否为全平面的一个重要工具. Fatou 1926 年就猜想 $J(e^z) = \mathscr{C}$，这一猜想直到 1981 年才被 Misiurewicz 证实. 这里，我们验证 $z = 0$ 在 e^z 下的轨道趋于∞，应用定理 8.12 便可简单导出这一结果.

以下还要指出，S 族函数的非排斥周期轨道的个数有限.

定理 8.13 设 $f \in S_q$，n_F 表示 $F(f)$的超吸引周期、吸引周期及抛物周期轨道的个数，n_I 表示 $F(f)$的无理中性周期轨道的个数，则 $n_F + n_I \leqslant q$.

由于这个定理的证明十分类似于有理函数的对应结果，故这里只简要介绍证明的主要步骤.

首先可设存在无理中性周期点 z_0，且 $f(z_1) = z_0$，其中 z_1 不属于 z_0 的周期轨道. 构造同胚 $h: \overline{\mathscr{C}} \mapsto \overline{\mathscr{C}}$，它在 $\overline{\mathscr{C}} \backslash D(z_1, \varepsilon)$ 上共形，且具有如下性质：

(i) $h(\infty)=\infty$;

(ii) $n_F(f\circ h)\geqslant n_F(f)+n_I(f)$;

(iii) z_0 是 $f\circ h$ 的一个吸引周期点，记其直接吸引域为 V，则 $f\circ h(D(z_1,\varepsilon))\subset V$.

继而应用可测 Riemann 映射定理，找到一个拟共形同胚 φ: $\mathscr{C}\mapsto\mathscr{C}$，使得

$$f_1=\varphi^{-1}\circ f\circ h\circ\varphi$$

是一个整函数. 进一步，φ^{-1}在 $f\circ h$ 的非排斥周期点的某个邻域里是共形的. 由于 $F(f_1)$的每个超吸引循环、吸引循环或抛物循环中至少有一个奇点，故 $n_F(f_1)\leqslant q$，所以

$$n_F(f)+n_I(f)\leqslant n_F(f_1)\leqslant q.$$

§8.4.3 $z\exp(z+\mu)$的动力学

历史上，Baker 于 1970 年首次构造出 Julia 集为全平面的超越整函数. 记 $f_\mu(z)=z\exp(z+\mu)$，$\mathscr{R}^+=(0,+\infty)$，Baker 证明了

$$B_0=\{\mu\in\mathscr{R}^+\ |J(f_\mu)=\mathscr{C}\}\neq\varnothing.$$

1992 年，Jang 进一步得到：B_0 是一个无穷集合. 下面介绍关于 B_0 结构的一个较广泛的结果. 记

$$s_n(\mu)=f_\mu^n(-1),\ n=0,1,2,\cdots.$$

引理 8.13 任取 $n\geqslant 2$，则 $s_n(\mu)\to 0\quad(\mu\to+\infty)$.

证明 对于任一正常数 k，易见

$$s_1(\mu)+k\mu\to-\infty\quad(\mu\to+\infty),$$

所以

$$s_0(\mu)+s_1(\mu)+2\mu\to-\infty\quad(\mu\to+\infty),$$

这说明

$$s_2(\mu)=-\exp(s_0(\mu)+s_1(\mu)+2\mu)\to 0\quad(\mu\to+\infty).$$

归纳地，我们假设对每一整数 $k\in[2, n-1]$ 有 $s_k(\mu)\to 0(\mu\to+\infty)$，则有

$$\sum_{k=0}^{n-1}s_k(\mu)+n\mu=s_0(\mu)+(s_1(\mu)+n\mu)+s_2(\mu)+\cdots+s_{n-1}(\mu)\to-\infty,$$

从而 $s_n(\mu)\to 0(\mu\to+\infty)$. 证毕.

定理 8.14 B_0 的极限点集是 $\mathscr{R}^+$ 上的非空无界集.

证明 记

$$E=\{x_0\in\mathscr{R}^+ \mid 某一条曲线\ y=s_n(x)(n\geqslant 2)$$

$$与射线\ y=-x\ 在\ x_0\ 处相交\}, \qquad (8.23)$$

以下分两种情况讨论：

1) 如果 E 为一个有界集，则存在常数 $M>2$，使得所有曲线 $y=s_n(x)(n=2, 3, \cdots)$ 当 $x>M$ 时均与 $y=-x$ 不相交，由引理 8.13，

$$-x<s_n(x)<0 \quad (n\geqslant 2, x>M). \qquad (8.24)$$

因为

$$s_{n+1}(x)=s_n(x)\mathrm{e}^{s_n(x)+x}, \qquad (8.25)$$

所以

$$s_{n+1}(x)<s_n(x) \quad (n\geqslant 2, x>M). \qquad (8.26)$$

从(8.24)式和(8.26)式可见 $\{s_n(\mu)\}_{n=2}^{\infty}$ 的极限存在，再由(8.25)式易导出

$$\lim_{n\to\infty}s_n(\mu)=-\mu,$$

亦即

$$f_\mu^n(-1)\to-\mu \quad (n\to\infty). \qquad (8.27)$$

下面证明当 $\mu\in(M, +\infty)$ 时，$J(f_\mu)=\mathscr{C}$. 如若不然，由于 f_μ 是有限型整函数，它仅有两个奇点 $0, f_\mu(-1)$，且它们的轨道全在半实轴 $(-\infty, 0]$ 上，而 f_μ 的不动点 $-\mu+2k\pi\mathrm{i}(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 当 $\mu\in(M, +\infty)$ 时全是排斥的，故从最终周期性定理及周期分支的

分类定理知：$F(f_\mu)$只有一个分支循环，它是超吸引、吸引或抛物的，由 $f_\mu^n(0)=0$ 及(8.2)式，便导出 $-\mu$ 为 f_μ 的非排斥不动点. 然而，$-\mu$ 的特征值为 $-\mu+1<-1$，这就得出矛盾，从而定理 8.14 结论为真.

2) 如果 E 是一个无界集，易见存在常数 $M(>3)$，使得

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-2\mu\right)e^{\frac{3}{2}-\mu}>0 \quad (\mu>M). \qquad (8.28)$$

以下只要证明对任意 $\mu^*\in E\cap(M,+\infty)$，存在一串点

$$\mu_n\to\mu^*(\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_n>\mu^*),$$

使得 $J(f_{\mu_n})=\mathscr{C}$ 即可.

假如存在点 $\mu^*\in E\cap(M,+\infty)$ 以及常数 $\delta>0$，使得

$$J(f_\mu)\neq\mathscr{C},\ \mu\in(\mu^*,\mu^*+\delta),$$

设 $y=s_{n_0}(x)$ 与 $y=-x$ 在 μ^* 处相交，因为 $z=-\mu^*$ 为 f_{μ^*} 的不动点，所以，所有 $y=s_n(x)(n\geqslant n_0)$ 均与 $y=-x$ 在 μ^* 处相交.

首先，曲线 $y=s_n(x)(n\geqslant 2)$ 和 $y=-x$ 中任意两者在$(\mu^*,\mu^*+\delta)$上不相交，否则 $f_\mu(-1)$将是 f_μ 的最终周期点，而 $f_\mu(0)=0\in J(f_\mu)$，由最终周期性定理及周期分支的分类定理易见 $J(f_\mu)=\mathscr{C}$.

如果在 $(\mu^*,\mu^*+\delta)$ 上，$s_{n_0}(x)<-x$，即

$$|s_{n_0}(x)|>x>1, \qquad (8.29)$$

以下证明在 $(\mu^*,\mu^*+\delta)$ 上，$s_{n_0+1}(x)>-x$. 事实上，记

$$g(x)=xe^{-x},$$

则

$$g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x},$$

从而当 $x>1$ 时 $g(x)$单调下降. 如果(8.29)式成立，则

$$g(|s_{n_0}(x)|)<g(x).$$

这说明在 $(\mu^*,\mu^*+\delta)$ 上，$s_{n_0+1}(x)>-x$.

综上所述可知,可以从 n_0 和 n_0+1 中选一个记为 n_1,使得在 $(\mu^*, \mu^*+\delta)$ 上, $s_{n_1}(x)>-x$. 对任何自然数 $k\geqslant n_1$, 如在 $(\mu^*, \mu^*+\delta)$ 上有 $s_k(x)>-x$, 从 $s_k(\mu^*)=-\mu^*$ 可见存在 $\varepsilon=\varepsilon(k)\in(0, \delta)$, 使得

$$2<|s_k(x)|<x, \ x\in(\mu^*, \mu^*+\varepsilon). \qquad (8.30)$$

任取 $x_0\in(\mu^*, \mu^*+\varepsilon)$, 记

$$h(x)=-x-xe^{-x+x_0}+2x_0,$$

则

$$h'(x)=-1-e^{-x+x_0}+xe^{-x+x_0},$$

$$h''(x)=(2-x)e^{-x+x_0}.$$

当 $x>2$ 时 $h'(x)$ 单调下降,且注意到 $h'(x_0)=x_0-2>0$, 则得 $h(x)$ 在 $(2, x_0)$ 上单调上升. 由(8.30)式,

$$h(|s_k(x_0)|)<h(x_0)=0,$$

即

$$s_k(x_0)+s_k(x_0)e^{x_0+s_k(x_0)}+2x_0<0,$$

从此得

$$s_{k+2}(x_0)=s_k(x_0)e^{s_k(x_0)+s_k(x_0)e^{x_0+s_k(x_0)}}+2x_0>s_k(x_0),$$

从而有

$$s_{k+2}(x)>s_k(x)>-x, \ x\in(\mu^*, \mu^*+\varepsilon). \ (8.31)$$

因为曲线 $y=s_n(x)(n\geqslant 2)$ 和 $y=-x$ 中的任意两条在 $(\mu^*, \mu^*+\delta)$ 上不相交,故(8.31)式在 $(\mu^*, \mu^*+\delta)$ 上成立. 归纳地,可得

$$s_{n_1+2j}(x)>s_{n_1+2(j-1)}(x)>-x \quad (j=1, 2, \cdots, x\in(\mu^*, \mu^*+\delta)),$$

从而 $\lim\limits_{j\to\infty}s_{n_1+2j}(\mu)$ 在 $(\mu^*, \mu^*+\delta)$ 上存在,记为 $a(\mu)$. 由(8.25)式得知, $\lim\limits_{j\to\infty}s_{n_1+2j-1}(\mu)$ 在 $(\mu^*, \mu^*+\delta)$ 上也存在,记为 $b(\mu)$. 显然, $a(\mu)\in(-\mu, 0]$, 且

$$a(\mu)=b(\mu)e^{b(\mu)+\mu}, \ b(\mu)=a(\mu)e^{a(\mu)+\mu},$$

故 $b(\mu) = -2\mu - a(\mu) \in (-\infty, -\mu)$. 从上述讨论还知道：

$$f_\mu^2(b(\mu)) = b(\mu),\ |(f_\mu^2)'(b(\mu))| \leqslant 1. \tag{8.32}$$

因为

$$f_\mu^2(z) = z\mathrm{e}^{z+z\mathrm{e}^{z+\mu}+2\mu},$$

所以由(8.32)式得到

$$b(\mu) + b(\mu)\mathrm{e}^{b(\mu)+\mu} + 2\mu = 0. \tag{8.33}$$

由于

$$(f_\mu^2)'(z) = (z+1)(1+z\mathrm{e}^{z+\mu})\mathrm{e}^{z+z\mathrm{e}^{z+\mu}+2\mu},$$

因此由(8.33)式得

$$(f_\mu^2)'(b(\mu)) = (1+b(\mu))(1-2\mu-b(\mu)).$$

此式及(8.32)式给出

$$|b(\mu) - (1-2\mu)| \leqslant \frac{1}{|1+b(\mu)|}. \tag{8.34}$$

因为 $\mu > 3$，且 $b(\mu) \in (-\infty, -\mu)$，所以

$$|1+b(\mu)| > \mu - 1 > 2.$$

从(8.34)式得

$$|b(\mu) - (1-2\mu)| < \frac{1}{2}.$$

记 $b(\mu) = 1 - 2\mu + \eta$，其中 η 为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 中的数，由(8.28)式得

$$\begin{aligned} b(\mu) + b(\mu)\mathrm{e}^{b(\mu)+\mu} + 2\mu &= 1 + \eta + (1-2\mu+\eta)\mathrm{e}^{1-\mu+\eta} \\ &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 2\mu\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}-\mu} > 0. \end{aligned}$$

这与(8.33)式矛盾，从而定理 8.14 得证. 证毕.

关于 $z\exp(z+\mu)$ 的动力学性质，以下我们将用较初等的方法证明其 Julia 集上存在淹没曲线. 所谓淹没曲线是指 Julia 集上不与 Fa-

tou 集的任何分支的边界相交的曲线.

定理 8.15[Qi1] 设 $\mu \in (2, +\infty)$，如果 $J(f_\mu) \neq \mathscr{C}$，则 $\mathscr{R}^+$ 为 $J(f_\mu)$上的淹没曲线.

证明 由定理 8.14 的证明中的讨论知,$F(f_\mu)$仅有一个分支循环,记为 $\{D_j\}_{j=0}^{p-1}$，它满足：

$$f_\mu(D_j) = D_{j+1}(j = 0, 1, \cdots, p-2), \ f_\mu(D_{p-1}) = D_0,$$

$$f_\mu(-1) \in \bigcup_{j=0}^{p-1} D_j,$$

此循环是超吸引、吸引或抛物的,并且存在 $x_0 \in \bigcup_{j=0}^{p-1} \overline{D}_j$，使得

$$f_\mu^{np+1}(-1) \to x_0 \quad (n \to \infty). \tag{8.35}$$

与 D_0 的类型对应,x_0 依次为超吸引的、吸引的或有理中性的周期点.

先证明 $J(f_\mu) \supset \mathscr{R}^+$. 假如存在 $x_1 > 0$ 且 $x_1 \notin J(f_\mu)$，则 x_1 在 $F(f_\mu)$的某一分支内,由上述讨论知,存在整数 $m \geqslant 0$，使 $f_\mu^m(x_1)$与 $f_\mu(-1)$属于某一个区域D_j. 又由(8.35)式得

$$f_\mu^{m+np}(x_1) \to x_0 \quad (n \to \infty). \tag{8.36}$$

因为

$$f_\mu^n(-1) < 0 \quad (n \geqslant 0),$$

所以 $x_0 \leqslant 0$. 另外，

$$f_\mu(x_1) = x_1 e^{x_1+\mu} > x_1,$$

这与(8.36)式矛盾. 故 $\mathscr{R}^+ \subset J(f_\mu)$.

以下证明 $\mathscr{R}^+$ 是淹没曲线. 假设存在一点 $a_0 \in \mathscr{R}^+$，且 a_0 在$F(f_\mu)$的某个分支的边界上,从上述讨论知,存在自然数 N,使得当 $n > N$ 时，

$$f_\mu^n(a_0) \in \bigcup_{j=0}^{p-1} \partial D_j.$$

记

$$a_n = f_\mu^n(a_0)(n = 1, 2, 3, \cdots),$$

显然，$a_n \in \mathscr{R}^+$ 且 $a_{n+1} > a_n (n = 1, 2, \cdots)$. 不失一般性，设当 $n > N$ 时

$$a_{np+j} \in \partial D_j (j = 0, 1, 2, \cdots, p-1).$$

现在证明 $a_{np+j} (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 位于 ∂D_j 的同一连通分支上. 如若不然，存在 $a_{n_1 p+j}$，$a_{n_2 p+j}$ 以及 ∂D_j 的两个不同的分支 α_1 和 α_2，使得

$$a_{n_1 p+j} \in \alpha_1, \ a_{n_2 p+j} \in \alpha_2.$$

在 D_j 内作曲线 ω，使得 α_1 和 α_2 属于 $\mathscr{C} \backslash \omega$ 的不同分支，从而，α_1 和 α_2 属于 $J(f_\mu)$ 的不同分支，这与 $[a_{n_1 p+j}, a_{n_2 p+j}] \subset J(f_\mu)$ 矛盾.

设 $\delta_n \subset \partial D_j$ 为连接 a_{np+j} 和 $a_{(n+1)p+j}$ 的有界部分，下面证明

$$[a_{np+j}, a_{(n+1)p+j}] \subset \delta_n.$$

如若不然，则 δ_n 与 $[a_{np+j}, a_{(n+1)p+j}]$ 围成了一个有界区域，故 $F(f_\mu)$ 一定有有界分支. 注意 $\{a_n\}$ 单调上升，记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，由于 $a_{n+1} = a_n e^{a_n + \mu}$，故 $A = Ae^{A+\mu}$，所以 $A = -\mu$，0 或 ∞. 因为 $a_n > 0$，所以 $A = \infty$，这说明 D_j 为一无界分支. 而 $F(f_\mu)$ 的任何分支在 f_μ 的迭代映射下最终要进入循环 $\{D_j\}_{j=0}^{p-1}$，从而 $F(f_\mu)$ 的分支全是无界的，这是矛盾的，所以，我们证明了

$$[a_{Np+j}, +\infty) \subset \partial D_j \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, p-1),$$

即 $[a_{N_0}, +\infty)$ 为 $D_0, D_1, \cdots, D_{p-1}$ 的公共边界，其中 $N_0 = Np + p - 1$，所以必有 $p \leqslant 2$.

假如 $p = 1$. 由于

$$f_\mu^{n+1}(-1) = f_\mu^n(-1) e^{f_\mu^n(-1) + \mu},$$

再考虑(8.35)式得

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} f_\mu^{n+1}(-1) = 0 \text{ 或 } -\mu,$$

这与 0 和 $-\mu$ 为 f_μ 的排斥不动点矛盾.

假如 $p = 2$. 不失一般性，可设沿 $[a_{N_0}, +\infty)$ 向 $+\infty$ 走时，D_0 在

左边，D_1 在右边，对于任意 $t_0 \in [a_{N_0}, +\infty)$，选取一串

$$z_n \in D_0 \cap \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\},$$

使得 $z_n \to t_0 (n \to \infty)$. 记 $z_n = r_n e^{i\theta_n}$，这里 $r_n > 0$，$\theta_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，则

$$f_\mu(z_n) = r_n e^{r_n \cos\theta_n + \mu} e^{i(\theta_n + r_n \sin\theta_n)}.$$

从此式易见，当 z_n 充分靠近 t_0 时，$f_\mu(z_n)$属于上半平面. 这与 $f_\mu(z_n) \in D_1$ 矛盾.

综上所述，$\mathscr{R}^+$ 为 $J(f_\mu)$上的淹没曲线. 证毕.

以下说明存在 $\mu > 2$，使 $J(f_\mu) \neq \mathscr{C}$. 当 $\mu > 2$，考虑函数

$$G(\mu) = \mu + \alpha(\mu) + (-\mu + \alpha(\mu)) \exp\alpha(\mu),$$

其中 $\alpha(\mu) = (\mu^2 - 2\mu + 2)^{1/2}$.

引理 8.14 存在 $\mu_* (> 2)$ 使得 $G(\mu) > 0 (2 < \mu < \mu_*)$，$G(\mu_*) = 0$ 且 $G(\mu) < 0 (\mu > \mu_*)$.

证明 记

$$g(\mu) = \exp\alpha(\mu) - \frac{\mu + \alpha(\mu)}{\mu - \alpha(\mu)} = \exp\alpha(\mu) - \mu - \frac{1 + \mu\alpha(\mu)}{\mu - 1},$$

易见

$$\begin{aligned} g'(\mu) &= \frac{\mu - 1}{\alpha(\mu)} \exp\alpha(\mu) - 1 - \frac{\mu}{\alpha(\mu)} + \frac{1 + \alpha(\mu)}{(\mu - 1)^2} \\ &> \frac{\mu - 1}{\alpha(\mu)} \sum_{k=0}^{2} \frac{(\alpha(\mu))^k}{k!} - 1 - \frac{\mu}{\alpha(\mu)} \\ &= \mu - 2 + \frac{(\mu - 1)\alpha(\mu)}{2} - \frac{1}{\alpha(\mu)} > 0, \end{aligned}$$

这可从 $(\mu - 1)(\mu^2 - 2\mu + 2) > 2 (\mu > 2)$ 导出，从而 $g(\mu)$单调上升. 因为 $g(2) = \exp\sqrt{2} - (3 + 2\sqrt{2}) < 0$ 且$\lim\limits_{\mu \to \infty} g(\mu) = +\infty$，故存在 $\mu_* (> 2)$，使 $g(\mu) < 0 (2 < \mu < \mu_*)$，$g(\mu_*) = 0$ 且 $g(\mu) > 0 (\mu > \mu_*)$. 显然

$$G(\mu) = (-\mu + \alpha(\mu))g(\mu),$$

且当 $\mu > 2$ 时，$-\mu + \alpha(\mu) < 0$，这就完成引理 8.14 的证明. 证毕.

现在，对任意固定的 $\mu(> 2)$，考虑函数

$$h_\mu(x) = x + f_\mu(x) + 2\mu.$$

易见 $f_\mu^2(x) = x\exp h_\mu(x)$. 记 $\beta(\mu) = (\mu^2 - 2\mu)^{1/2}$.

引理 8.15 在区间 $I = (-\mu + \beta(\mu), -\mu + \alpha(\mu))$ 内存在点 x'，使得 $h_\mu(x') < 0$.

证明 首先注意

$$-2 < -\mu + \beta(\mu) < -1 < -\mu + \alpha(\mu).$$

因为当 $x \in I$ 时，$h''_\mu(x) = (x + 2)\exp(x + \mu) > 0$，故 h'_μ 在 I 上单调上升. 考虑函数

$$H(\mu) = h'_\mu(-\mu + \beta(\mu)),$$

可以验证 $H(2) = 0$，且当 $\mu > 2$ 时 $H'(\mu) < 0$，从而，当 $\mu > 2$ 时，$H(\mu)$ 递减，且 $h'_\mu(-\mu + \beta(\mu)) = H(\mu) < 0$. 由于 h'_μ 在 I 上单调且 $h'_\mu(-1) = 1$，因此存在 $x' \in (-\mu + \beta(\mu), -1) \subset I$，使

$$h'_\mu(x') = 1 + (x' + 1)\exp(x' + \mu) = 0,$$

从而有

$$\begin{aligned} h_\mu(x') &= x' + 2\mu + x'\exp(x' + \mu) \\ &= \frac{(x' + \mu)^2 - \mu^2 + 2\mu}{x' + 1} \\ &= \frac{(x' + \mu)^2 - \beta(\mu)^2}{x' + 1}. \end{aligned}$$

又由于 $\beta(\mu) < x' + \mu$，$x' + 1 < 0$，故 $h_\mu(x')$ 为负值，这就完成了引理 8.15 的证明. 证毕.

引理 8.16 如果 $\mu \in (2, \mu_*)$，则 $J(f_\mu) \neq \mathscr{C}$.

证明 引理 8.14 中的 $G(\mu)$ 和引理 8.15 中的 h_μ 具有关系

$$G(\mu) = h_\mu(-\mu + \alpha(\mu)).$$

由引理 8.14，当 $\mu \in (2, \mu_*)$ 时，

$$h_\mu(-\mu + \alpha(\mu)) > 0.$$

进一步，引理 8.15 说明存在 $x' \in (-\mu + \beta(\mu), -\mu + \alpha(\mu))$，使得

$$h_\mu(x') < 0,$$

所以，存在 $x_0 \in (-\mu + \beta(\mu), -\mu + \alpha(\mu))$，使得

$$h_\mu(x_0) = x_0 + f_\mu(x_0) + 2\mu = 0.$$

由 h_μ 的定义得 $f_\mu^2(x_0) = x_0$，即 x_0 为 f_μ 的 2 阶周期点. 另一方面，

$$(f_\mu^2)'(x) = \frac{f_\mu^2(x)}{x}(f_\mu(x) + 1)(x + 1),$$

故

$$\begin{aligned}(f_\mu^2)'(x_0) &= (f_\mu(x_0) + 1)(x_0 + 1) \\ &= (1 - x_0 - 2\mu)(x_0 + 1) \\ &= -(x_0 + \mu)^2 + (\mu - 1)^2.\end{aligned}$$

由于 $\beta(\mu) < x_0 + \mu < \alpha(\mu)$，我们有 $|(f_\mu^2)'(x_0)| < 1$，即 x_0 为吸引周期点，所以 $F(f_\mu) \neq \varnothing$. 证毕.

注 以上三个引理是 C. M. Jang 得到的结果(见文献[Ja]).

由定理 8.15 和引理 8.16 立刻有命题 8.2.

命题 8.2 存在 $\mu_* > 2$，使得 $\mu \in (2, \mu_*)$ 时，$J(f_\mu) \neq \mathscr{C}$，且 $\mathscr{R}^+$ 为 $J(f_\mu)$上的淹没曲线.

§8.5 关于完全不变分支

一个 Fatou 分支 D 称为整函数 f 的完全不变分支，如果

$$f(D) \subset D \text{ 且 } f^{-1}(D) \subset D.$$

显然超越整函数的完全不变分支是无界的. 由定理 8.3 的推论 8.1 知道,如果 f 有完全不变分支,则 $F(f)$的分支全为单连通区域. 以下我们称一点 a 为一个整函数 f 的对数奇点,如果存在圆盘 $D(a, r)$,使 $f^{-1}(D(a, r))$包含一无界分支 W,使得 $f: W \to D(a, r)\setminus\{a\}$ 为万有覆盖. 先叙述一个引理.

引理 8.17(**Gross 定理**[Ne]) 设 f 为整函数,g 为 f^{-1}定义在 $W_0 \in \mathscr{C}$ 的一个邻域上的函数元素,则 g 可以沿几乎所有射线 $\{W_0 + te^{i\theta}, 0 \leqslant t < \infty\}(\theta \in [-\pi, \pi])$ 进行解析延拓.

定理 8.16 设超越整函数 f 具有完全不变分支 D,则 f 的临界点和对数奇点属于 D.

证明 设 $a \notin D$ 为 f 的一个临界点或对数奇点,并设 $V = D(a, r)\setminus\{a\}$, r 充分小, W 是 $f^{-1}(V)$ 的一个分支,使得

$$f: W \mapsto V$$

为一非分支覆盖,但不是同胚(如果 a 是对数奇点,则 $f|W$ 是万有覆盖;如果 a 是临界点,则 W 是二连通的,且 $f|W$ 是有穷叶覆盖).

固定 W 中的两个点 b_1 和 b_2,使 $f(b_1) = f(b_2) = b$, 记 g_i 为 f^{-1}的二分支,且 $g_i(b) = b_i(i = 1, 2)$, 由引理 8.17 可知,存在直线段 $[b, c]$, $c \in D$, 使得 g_j 可以沿$[b, c]$进行解析开拓. 记

$$\gamma_j = g_j([b, c]) \quad (j = 1, 2),$$

曲线 γ_j 连接 b_i 和 c_i,我们有

$$f(c_1) = f(c_2) = c \in D.$$

由于 D 是完全不变的,故 c_1 和 c_2 属于 D,存在简单曲线 $\gamma_0 \subset D$, 它连接 c_1 和 c_2. 再由 D 的完全不变性得

$$f(\gamma_0) \subset D,$$

存在一个小的 $r' \in (0, r)$, 使得

$$D(a, 2r') \cap f(\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2) = \varnothing,$$

所以，$f^{-1}(D(a, 2r')\backslash\{a\})$ 的属于 W 的分支 W_1 与 $\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ 不相交(当 $r' \to 0$, W_1 一致地趋于临界点 $z_0 \notin D$ 或者 ∞). 选取一点 $d \in \partial D(a, r')$，使得直线段$[b, d]$具有性质：

$$[b, d] \cap D(a, r') = \varnothing, \text{且}[b, d] \cap [b, c] = \{b\}.$$

由于 $f: W \mapsto V$ 是覆盖，所以函数元素 g_j 可以沿$[b, d]$进行解析开拓，我们得到两条互不相交的曲线：

$$\beta_j = g_j([b, d])(j = 1, 2),$$

它们连接 b_j 和 d_j, $f(d_1) = f(d_2) = d$, 从而，我们用简单曲线 β 连接 d_1 和 d_2，使得 $\beta \cap \beta_j = \{d_j\}$ 且 $f(\beta)$为圆周 $\partial D(a, r')$.

记

$$\delta_j = \beta_j \cup \gamma_j \quad j = 1, 2,$$

从而简单曲线 δ_1, δ_2 和 β 具有两两不交的内部，且

$$\beta \cap \gamma_0 = \varnothing.$$

设 $\gamma_0(t): 0 \leqslant t \leqslant 1$ 为 γ_0 的参数表示，$\gamma_0(0) = c_1$, $\gamma_0(1) = c_2$, 在$[0, 1]$中存在 t_1 和 t_2，使得

$$\gamma' = \{\gamma_0(t): t_1 < t < t_2\} \cap (\delta_1 \cup \delta_2) = \varnothing,$$

$\gamma_0(t_1) = c_1' \in \delta_1$, 且 $\gamma_0(t_2) = c_2' \in \delta_2$. 记 δ_j 上从 d_j 到 c_j' 的部分为 δ_j'，则

$$\Gamma = \beta \cup \delta_1' \cup \delta_2' \cup \gamma'$$

为一 Jordan 曲线. 记 A 为其余集的有界分支，像 $f(\Gamma)$包含以下部分：

(i) 圆周 $\partial D(a, r')$;

(ii) 曲线 $f(\delta_1' \cup \delta_2')$ 是$[b, d] \cup [b, c]$ 的一部分；

(iii) 曲线 $f(\gamma') \subset f(\gamma_0) \subset D$, 它与 $D(a, 2r')$不交.

由于 D 是单连通的，故 $D(a, 2r')$位于$\mathscr{C}\backslash f(\gamma')$的一个无界分支中.

考虑点

$$\{w\} = \partial D(a, 2r') \cap f(\Gamma) = \partial D(a, 2r') \cap [b, d],$$

以及圆盘 $C = D(w, \varepsilon)$，这里 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $\varepsilon < r'$，且

$$C \cap ([b, c] \cup f(\gamma')) = \varnothing,$$

从(i)，(ii)和(iii)可见，$f(\Gamma)$关于 $C \backslash [b, d]$中所有点的绕数均为零. 另外，

$$w \in [b, d] \subset \overline{f(A)},$$

且 $f(A)$为开集，这是矛盾的，从而定理 8.16 得证. 证毕.

从上述定理，我们立刻有下述推论.

推论 8.4 设 f 为超越整函数，它具有完全不变分支 D，则

1) 如果 V 是 $F(f)$的另一分支 $(V \neq D)$，则 f 在 V 上是单叶的；

2) f 没有别的完全不变分支，即 f 至多有一个完全不变分支.

推论 8.5 超越整函数的 Fatou 集的分支数为 0，1 或∞.

Baker 曾猜想：如果超越整函数有完全不变域 D，则它的 Fatou 集 $F(f) = D$. 这一猜想至今没被证明或否定. 考虑有限型整函数，则有定理 8.17.

定理 8.17 设 $f \in S$ 为超越整函数，它具有完全不变分支 D，则 $F(f) = D$.

证明 由于 $f \in S$，$F(f)$ 的每个分支均是最终周期的，且周期分支只能是吸引、超吸引、抛物分支或 Siegel 盘，但现在 D 是不变分支，且由于 D 内含有奇点，故 D 不能是 Siegel 盘. 这样，D 内的奇点轨道只能收敛于唯一的一个不动点. 假如 $F(f) \neq D$，则存在异于 D 的 Fatou 分支 G，那么 G 是最终周期的，但由于 f 的奇点全在 D 内，故 G 对应的周期分支既不能是吸引、超吸引或抛物分支(因它们至少含有一个奇点)，也不能是 Siegel 盘(因其边界在奇点正向轨道的闭包内，而现在所有奇点轨道只有唯一一个极限点)，这是一个矛盾. 证毕.

§8.6 关于 Julia 集的渐近分布

由于 Julia 集是动力系统的不稳定点集，故探讨 Julia 集的结构是十分重要的. 对于超越整函数而言，由于∞是其本性奇点，因此，关于

Julia 集在∞的邻域内的分布和结构的研究就更加重要. 本节主要讨论超越整函数的 Julia 集在∞附近的分布情况,并介绍这方面的研究工作.

§ 8.6.1 整函数在其 Fatou 集上的增长性

设 D 为整函数 f 的 Fatou 集 $F(f)$的一个无界分支,这里要考虑的问题是:当 $z \in D$ 且 $z \to \infty$ 时,$|f(z)|$ 的增长速度如何?

任取 $z_0 \in \mathscr{C}$, θ, $\delta \in \mathscr{R}$, 记

$$\Omega(z_0,\ \theta,\ \delta) = \{z \mid |\arg(z - z_0) - \theta| < \delta\},$$

我们首先有定理 8.18.

定理 8.18[Qi2] 设 f 为超越整函数,且 $\Omega(z_0,\ \theta,\ \delta) \subset F(f)$,则任取 $\delta' \in (0,\ \delta)$,有

$$|f(z)| = O\left(|z|^{\frac{\pi}{\delta}}\right),\ z \in \Omega(z_0,\ \theta,\ \delta').$$

证明 因为 $\Omega(z_0,\ \theta,\ \delta) \subset F(f)$,所以存在 $F(f)$的无界分支 G_0,使得

$$\Omega(z_0,\ \theta,\ \delta) \subset G_0.$$

由定理 8.3 的推论 8.1 及 Julia 集的非空性可知,$F(f)$的每一个分支均为单连通双曲型区域. 易验证,映射

$$w = h(z) = \frac{(e^{-i\theta}z - e^{-i\theta}z_0)^{2^{\frac{\pi}{\delta}}} - 1}{(e^{-i\theta}z - e^{-i\theta}z_0)^{2^{\frac{\pi}{\delta}}} + 1}$$

把 $\Omega(z_0,\ \theta,\ \delta)$共形地映射为 $\{|w| < 1\}$. 记

$$h^{-1}(0) = a \in \Omega(z_0,\ \theta,\ \delta),$$

由 Riemann 映射定理可知,存在共形映射

$$w = g(z):\ G \to \{|w| < 1\},$$

其中 G 为 $f(G_0)$所在的 $F(f)$的那个分支,$g(f(a)) = 0$ 且 $g'(f(a))$

>0，从而

$$F(w)=g\circ f\circ h^{-1}(w)$$

是单位圆盘的解析自映射. 由 Schwartz 引理得

$$|F(w)|\leqslant|w|\quad(|w|<1). \tag{8.37}$$

由于 $g^{-1}(w)$ 为 $\{|w|<1\}$ 上的单叶函数,因此由 Koebe 偏差定理有

$$|(g^{-1}(w)-f(a))g'(f(a))|\leqslant\frac{|w|}{(1-|w|)^2}\quad(|w|<1). \tag{8.38}$$

注意

$$f(z)=g^{-1}\circ F\circ h(z),$$

则由(8.37)式、(8.35)式得

$$|f(z)|\leqslant|f(a)|+\frac{1}{|g'(f(a))|(1-|h(z)|^2)},\ z\in\Omega(z_0,\theta,\delta). \tag{8.39}$$

任取 $z\in\Omega(z_0,\theta,\delta')$，记

$$\eta=z-z_0=re^{i\alpha},\ \sigma=\frac{\pi}{2\delta},\ \lambda=\sin\frac{\delta'\pi}{2\delta}>0,$$

则

$$|h(z)|^2=\left|\frac{1-(\cos\sigma(\alpha-\theta))/r^2+i(\sin\sigma(\alpha-\theta))/r^\sigma+o(1/r^\sigma)}{1+(\cos\sigma(\alpha-\theta))/r^2-i(\sin\sigma(\alpha-\theta))/r^\sigma+o(1/r^\sigma)}\right|^2$$

$$=\frac{1-2(\cos\sigma(\alpha-\theta))/r^\sigma+o(1/r^\sigma)}{1+2(\cos\sigma(\alpha-\theta))/r^d+o(1/r^\sigma)},$$

所以

$$1-|h(z)|>\frac{1-|h(z)|^2}{2}=\frac{4(\cos\sigma(\alpha-\theta))/r^\sigma+o(1/r^\sigma)}{1+2(\cos\sigma(\alpha-\theta))/r^\sigma+o(1/r^\sigma)}$$

$$\geqslant\frac{4\lambda/r^\sigma+o(1/r^\sigma)}{1+2/r^\sigma+o(1/r^\sigma)}.$$

从上不等式及(8.39)式得

$$|f(z)| = O(|z|^{2\sigma}) = O\left(|z|^{\frac{\pi}{\delta}}\right),\ z \in \Omega(z_0,\ \theta,\ \delta').$$

证毕.

§8.6.2 整函数及其导函数的 Julia 集

Baker 曾经研究整函数 Julia 集的分布，他证明了超越整函数的 Julia 集不能分布在有穷条直线上. 下面引入定义.

定义 8.1 设$\mathscr{A}$是一个无界复数集合，$\theta \in \mathscr{R}$，如果任取 $\varepsilon > 0$，$\mathscr{A} \cap \{z \mid |\arg z - \theta| < \varepsilon\}$ 均无界，则称 θ 为$\mathscr{A}$的一个渐近方向.

Baker 曾证明有穷级超越整函数的 Julia 集的渐近方向至少有两个. 同时，他们举例说明了存在无穷级整函数，其 Julia 集仅有一个渐近方向. 这里，我们结合导函数的 Julia 集的分布情况，给出最精确的结果. 以下用 $f^{(n)}$表示 f 的 n 阶导数，当 $n<0$ 时，则表示$|n|$阶积分原函数.

定理 8.19[Qi3] 设 f 是下级为 $\lambda < \infty$ 的超越整函数，则存在闭区间 $I \subset \mathscr{R}$，使得 $\theta \in I$ 全为 $J(f^{(n)})(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ 的公共渐近方向，其中 $\mathrm{mes} I \geqslant \pi/\max\left(\frac{1}{2},\ \lambda\right)$.

证明 我们区分以下两种情况：

1) 如果 f 的下级 $\lambda < \frac{1}{2}$，我们将证明所有 $\theta \in [0,\ 2\pi)$ 为 $J(f^{(n)})(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ 的公共渐近方向. 事实上，如若不然，假设存在 $\theta \in [0,\ 2\pi)$，以及 $f^{(n_0)}$，使得 θ 不是 $J(f^{(n_0)})$的渐近方向，那么，对于某个 $\delta > 0$，$J(f^{(n_0)}) \cap \Omega(0,\ \theta,\ \delta)$ 有界. 由定理 8.18 有

$$|f^{(n_0)}(z)| = O(|z|^k),\ \arg z = \theta, \qquad (8.40)$$

这里 k 为某一正常数. 由于 $f^{(n_0)}$的下级小于$\frac{1}{2}$，因此(8.40)式与关于整函数极小模的 Wiman 定理矛盾.

2) 如果 f 的下级大于等于$\frac{1}{2}$，记

$$E_n = \{e^{i\theta} \mid \theta \text{ 是 } J(f^{(n)}) \text{ 的一个渐近方向}\},$$

易见 E_n 是单位圆周 Γ 上的闭集. 记

$$E = \bigcap_{n \in \mathscr{Z}} E_n,$$

其中$\mathscr{Z}$表示整数集合. 显然,E 中点对应的辐角为所有 $J(f^{(n)})$的公共渐近方向,且 E 的每一个连通分支是 Γ 上的闭弧. 以下只要证明 E 的最长连通分支的弧长 $\geqslant \frac{\pi}{\lambda}$ 即可. 如若不然,记

$$\gamma = \{\alpha \mid \alpha \text{ 为 } \Gamma \text{ 上的开弧,其长度小于} \frac{\pi}{\lambda}, \alpha \text{ 的两端点不在 } E \text{ 中}\},$$

则 γ 覆盖了 Γ. 由有限覆盖定理可知,存在有穷个 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \gamma$,使得

$$\bigcup_{j=1}^{p} \alpha_j \supset \Gamma.$$

记 α_j 的两端点为 $e^{i\theta_{j_1}}$, $e^{i\theta_{j_2}}(\theta_{j_1} < \theta_{j_2})$, 且 θ_{j_1}不是 $J(f^{(n_{j_1})})$的渐近方向,θ_{j_2}不是 $J(f^{(n_{j_2})})$的渐近方向,由定理 8.18 有

$$|f^{(n_{j_1})}(z)| = O(|z|^{k_{j_1}}), \arg z = \theta_{j_1}, \tag{8.41}$$

$$|f^{(n_{j_2})}(z)| = O(|z|^{k_{j_2}}), \arg z = \theta_{j_2}, \tag{8.42}$$

其中 k_{j_1}, k_{j_2}都为正常数.

记 $m = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant p}(n_{j_1}, n_{j_2})$, 于是

$$f^{(n_{j_1}-1)}(z) = \int_0^z f^{(n_{j_1})}(\eta)\mathrm{d}\eta + c,$$

其中 c 为某一常数,上述积分路径设置为从 0 到 z 的直线段. 由此及(8.41)式得

$$|f^{(n_{j_1}-1)}(z)| = O(|z|^{k_{j_1}+1}), \arg z = \theta_{j_1}.$$

重复上述估计可得

$$|f^{(m)}(z)| = O(|z|^{k_1}), \arg z = \theta_{j_1},$$

其中 k_1 为某一正常数. 用同样方法从(8.42)式可得

$$|f^{(m)}(z)| = O(|z|^{k_2}),\ \arg z = \theta_{j_2},$$

其中 k_2 为某一正常数. 注意

$$\theta_{j_2} - \theta_{j_1} < \pi/\lambda,$$

由 Phragmén-Lindelöf 原则有

$$|f^{(m)}(z)| = O(|z|^{k}),\ \theta_{j_1} \leqslant \arg z \leqslant \theta_{j_2} (j = 1, 2, \cdots, p),$$

其中 $k = \max(k_1, k_2)$. 由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 覆盖了 Γ,因此上式说明了 f 为多项式,这就得出矛盾,从而定理 8.19 得证. 证毕.

例 8.1 Mittag-Leffer 函数 $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)} (0 < \alpha < 1)$ 是级和下级均为 $\frac{1}{\alpha}$ 的超越整函数,且 $E_\alpha(z)$ 在 $\mathscr{C} \backslash \overline{\Omega}\left(0, 0, \frac{\alpha}{2}\pi\right)$ 上有界,从而,存在 $K(\alpha)$,使 $f_{\alpha k}\left(\mathscr{C} \backslash \overline{\Omega}\left(0, 0, \frac{\alpha}{2}\pi\right)\right) \subset \mathscr{C} \backslash \overline{\Omega}\left(0, 0, \frac{\alpha}{2}\pi\right)$, 其中 $f_{\alpha k}(z) = E_\alpha(z) - K$, 所以 $J(f_{\alpha k}) \subset \overline{\Omega}\left(0, 0, \frac{\alpha}{2}\pi\right)$.

此例说明定理 8.19 中关于闭区间 I 的长度估计是最佳的.

事实上,用证明定理 8.19 的方法我们能够证明下述更广泛的结果.

定理 8.20 设 f 是下级 $\lambda < \infty$ 的超越整函数,则存在闭区间 $I \subset \mathscr{R}$, 使得任取 $\theta \in I$, θ 均为

$$J((((f)^n)^{(k)})^m) \quad (m, n \in \mathscr{N}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

的公共渐近方向,且 $\operatorname{mes} I \geqslant \pi/\max\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$, 其中 $(f)^j$ 表示 f 的方幂.

§8.7 指数函数的动力学

容易说明 S_1(仅有一个基本点的有限型整函数类)中的函数具有

形式 $be^{cz}+a$. 由于种种原因,人们对指数函数动力学性质的研究有特别浓厚的兴趣. Misiurewicz 证明了 Fatou 的猜想 $J(e^z)=\mathscr{C}$ 后,吸引了更多人在这方面的兴趣. 近年来,关于指数函数 λe^z 的动力学的研究出现了大量的成果,本节不可能尽述全部内容,希望获得更多这方面内容的读者可以参考书后有关文献.

§8.7.1 Fatou 集的分支

对于 $f_\lambda(z)=\lambda e^z(\lambda\in\mathscr{C})$,它只有一个渐近值奇点 0,由定理8.13,$F(f_\lambda)$至多有一个周期分支. 由于 f_λ 没有临界点,故$F(f_\lambda)$没有超吸引分支,又由于有限型整函数没有 Baker 分支,故当 $F(f_\lambda)\neq\varnothing$ 时,$F(f_\lambda)$有一个周期分支,它是吸引分支、抛物分支或 Siegel 盘. 以下记

$$D_1=\{\lambda\in\mathscr{C}\,|\,\lambda e^z\ \text{有一个吸引不动点}\},$$

易见,此集合还有另一个表述:

$$D_1=\{\lambda\in\mathscr{C}\,|\,\lambda=te^{-t},\ t\ \text{为单位圆盘内一点}\}.$$

事实上,D_1 是心脏线的内部区域.

定理 8.21 $F(f_\lambda)$仅有一个分支的充要条件为

$$\lambda\in D_1\cup\{e^{-1}\}.$$

证明 如果 $\lambda\in D_1\cup\{e^{-1}\}$,则 $\lambda=te^{-t}(|t|<1$,或$t=1)$. 因为不动点 $\xi=e^t$ 的特征值为 t,所以 ξ 属于 $F(f_\lambda)$的一个分支 G,或 $\xi\in\partial G$, 且 G 是 f_λ 的不变分支. 由周期分支的分类定理, $0\in G$ 且 $f_\lambda(G)=G\backslash\{0\}$, 我们取 G 中的 z_1 充分靠近 0,使得对 f_λ^{-1} 的某个分支有 $f_\lambda^{-1}(z_1)\in G$. 绕 0 点解析开拓 f_λ^{-1},可得 f_λ^{-1} 的所有分支均有 $f_\lambda^{-1}(z_1)\in G$. 从 z_1 开始,在 G 上解析开拓 f_λ^{-1} 可得:任取 $z\in G\backslash\{0\}$, $f_\lambda^{-1}(z)\in G$, 从而,G 是 f_λ 的完全不变分支. 由定理 8.17 可知, $F(f_\lambda)=G$.

反过来,如果 $F(f_\lambda)$仅有一个分支 G,则 G 是完全不变分支. 因为 $f(G)\subset G$, 且由定理 8.16 可知,奇点 $0\in G$, 所以 G 不能是 Siegel 盘,

从而存在不动点 η，其特征值小于等于 1，且当 $z \in G$ 时，$f_\lambda^n(z) \to \eta$ $(n \to \infty)$，故 $\lambda \in D_1$ 或者 η 的特征值为一 p 次单位根. 下证 $p = 1$：如若不然，则 $p > 1$，存在 $F(f_\lambda)$ 的 p 个不同分支 $G_1, G_2, \cdots, G_p$，它们的边界均含 η. 因为存在角点在 η 的角域 A，使得对 A 中任一通向 η 的线段 σ，以及将 σ 旋转 $2\pi/p$ 角的线段 σ'，$f_\lambda^n(z)$ 在 σ 和 σ' 上一致趋于 η. 假设 σ 和 σ' 位于同一区域 G_i 中，我们在 G_i 内连接 σ 和 σ' 的端点，得到一 Jordan 闭曲线 γ，在其上 $f_\lambda^n(z)$ 一致趋于 η. 这说明 γ 的内部在 G_i 中，从而也在 $F(f_\lambda)$ 中. 继而导出 $F(f_\lambda)$ 至少有 p 个分支，这是矛盾的，从而 $p = 1$，从此易见 $\lambda = e^{-1}$. 证毕.

§8.7.2 Julia 集上的 Cantor 束

从上一段知，当 $\lambda \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时，$F(f_\lambda)$ 仅有一个分支. Devaney 和 Krych 研究了这时 Julia 集 $J(f_\lambda)$ 的结构，他们证明了此时 Julia 集 $J(f_\lambda)$ 是所谓 Cantor 束. 事实上，他们还证明了更广泛函数类的 Julia 集上存在 Cantor 束，这里不一一详述，有兴趣的读者可参考文献[DK, De].

首先介绍 Cantor 束的概念.

任取正整数 N，考虑序列空间：

$$\Sigma_N = \{(s_0, s_1, s_2, \cdots) \mid s_j \in \mathscr{Z}, |s_j| \leqslant N\},$$

其中 $\mathscr{Z}$ 表示整数集合，则存在一个自然的拓扑，使 Σ_N 为 Cantor 集. 定义位移

$$\sigma(s_0, s_1, s_2, \cdots) = (s_1, s_2, s_3, \cdots).$$

我们称平面 $\mathscr{C}$ 上的一个闭子集 C_N 为整函数 f 的 Cantor N-束，如果 $f(C_N) \subset C_N$，且存在同胚 $h: \Sigma_N \times [0, \infty) \mapsto C_N$ 具有如下性质：

(i) 对所有 $t \in [0, \infty)$，有

$$(\pi \circ h^{-1} \circ f \circ h)(s, t) = \sigma(s),$$

其中 $\pi: \Sigma_N \times [0, \infty) \mapsto \Sigma_N$ 为投影，即 $\pi(s, t) = s$；

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} h(s, t) = \infty$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(h(s, t)) = \infty$ 对 $t > 0$ 均成立.

Cantor N-束实际上是由曲线形成的 Cantor 集,且每一条曲线通向∞.

给定一串 Cantor N-束 C_N,如满足 $C^N \subset C_{N+1}$,则

$$C_\infty = \text{Closure}\{\bigcup_{N=1}^{\infty} C_N\}$$

称为 Cantor 束.

以下说明 $f_\lambda(z) = \lambda e^z \left(0 < \lambda < \frac{1}{e}\right)$ 的 Julia 集为 Cantor 束.

对于给定的 $N \geqslant 1$,取 $c > 1$,使得

$$f_\lambda(c) > c + (2N + 1)\pi,$$

考虑矩形:

$$R_j = \{z \in \mathscr{C} \mid 1 < \text{Re}z < c, (2j - 1)\pi < \text{Im}z < (2j + 1)\pi\},$$

其中 $j \in \{-N, -N + 1, \cdots, N\}$. 对于每一个 j,我们有

$$f_\lambda(R_j) = \{z \in \mathscr{C} \mid \lambda e < |z| < \lambda e^c, |\arg z| < \pi\},$$

故对于 $j, k \in \{-N, -N + 1, \cdots, N\}$, c 保证了

$$R_k \subset f_\lambda(R_j).$$

定义

$$R = \bigcup_{j=-N}^{N} R_j,$$

且

$$\Lambda_N = \{z \in \mathscr{C} \mid f_\lambda^n(z) \in R \text{ 对一切 } n \geqslant 1 \text{ 成立}\},$$

能够证明 Λ_N 是同胚于 Σ_N 的 Cantor 集.

这种构造法给出了"端点",即 $h(\Sigma_N \times \{0\})$ 中的点. 连在"端点"上的曲线可这样给出:任取一点 $w \in \Lambda_N$,考虑所有那样的点 $z \in \mathscr{C}$,它们对所有 $n \geqslant 0$,使 $f_\lambda^n(z)$和 $f_\lambda^n(w)$位于同一个半带域:

$$S_j = \{z \in \mathscr{C} \mid 1 < \text{Re}^z < c, (2j - 1)\pi < \text{Im}z < (2j + 1)z\}$$

中，可证明这个集合是一曲线族，且具有 Cantor 束中所要求的性质. 图 8.1 所示为 $f_\lambda(z)=\lambda e^z$ 的 Julia 集 $\left(\lambda<\frac{1}{e}\right)$.

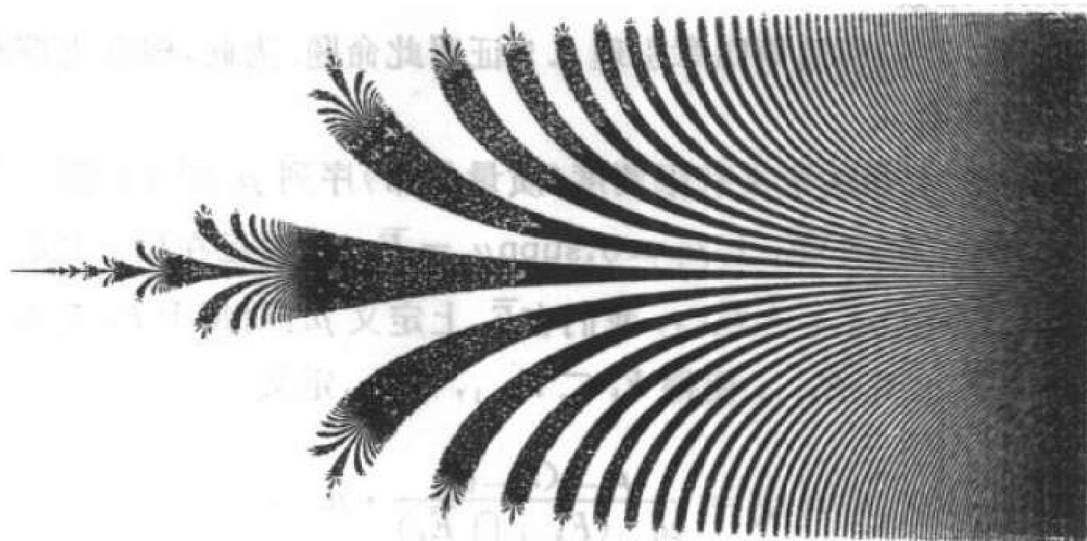


图 8.1　$f_\lambda(z)=\lambda e^z$ 的 Julia 集，$\lambda<\frac{1}{e}$，其中包含一个 Cantor 束

§8.7.3　Julia 集的 Hausdorff 维数

在这一段中，我们将证明 λe^z 的 Julia 集具有 Hausdorff 维数 2. 首先介绍体积和 Hausdorff 维数的有关预备知识.

对于 $k=1,2,\cdots$，设 E_k 表示 $\mathscr{R}^n$ 的有限个互不相交的紧子集 F 的集合；设 $\overline{E}_k$ 表示由 E_k 中的元素并起来所得到的紧集. 我们假定：

(i) 每一个 $F_{k+1}\in E_{k+1}$ 含于唯一一个 $F_k\in E_k$；

(ii) 每一个 $F_k\in E_k$ 至少包含 E_{k+1} 一个元素.

考虑集合 $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{E}_k$. 假设对于所有 k 及 E_k 中所有 F_k，密度

$$\operatorname{den}(\overline{E}_{k+1},F_k)=\frac{\operatorname{mes}(\overline{E}_{k+1}\cap F_k)}{\operatorname{mes}(F_k)}\geqslant\Delta_k,$$

且直径

$$\operatorname{diam}(F_k)\leqslant d_k\to 0(k\to\infty),$$

这里 mes 表示 n 维 Lebesgue 测度，则有下述命题.

命题 8.3[Mc] $\varlimsup_{k\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k+1}|\log\Delta_j|}{|\log d_k|}\geqslant n-\dim(E)$，其中 dim 表示 Hausdorff 维数.

证明 我们利用第四章引理 4.5 证明此命题.为此，构造支撑在 E 上的有限测度 μ.

先在$\overline{E}_k$ 上归纳定义有限测度(质量分布)序列 μ_k 如下:在$\overline{E}_1$ 上定义 $\mu_1\equiv\mathrm{mes}$，在$\mathscr{R}^n\setminus\overline{E}_1$ 上 $\mu_1\equiv 0$，$\mathrm{supp}\mu_1=\overline{E}_1$. 假设已在$\overline{E}_{k-1}$上定义了测度 μ_{k-1}，$\mathrm{supp}\mu_{k-1}=\overline{E}_{k-1}$，我们在$\overline{E}_k$ 上定义 μ_k:对每个 $F_k\in E_k$，存在唯一的 $F_{k-1}\in E_{k-1}$，使得 $F_k\subset F_{k-1}$，那么，定义

$$\mu_k|_{F_k}=\frac{\mu_{k-1}(F_{k-1})}{\mu_{k-1}(F_{k-1}\cap\overline{E}_k)}\cdot\mu_{k-1},$$

$$\mu_k|_{\mathscr{R}^n\setminus\overline{E}_k}=0,$$

这样就定义好了有限测度序列 μ_k,我们说 μ_k 弱收敛于一个有限测度 μ. 事实上,对任意连续函数 f, $\int_{\mathscr{R}^n}f\mathrm{d}\mu_k$是一个 Cauchy 序列,这个序列收敛于连续函数空间上的有界线性泛函 $\sigma(f)$,由 Riesz 表示定理,存在有限测度 μ,使得 $\sigma(f)=\int_{\mathscr{R}^n}f\mathrm{d}\mu$, 即 μ_k 弱收敛于 μ. 容易验证 $\mathrm{supp}\mu=E$.

由定义,对 $F_k\in E_k$，有

$$\mu_{k+1}(F_k)=\mu_{k+1}(F_k\cap\overline{E}_{k+1})=\mu_k(F_k),$$

一般地,有

$$\mu_{k+m}(F_k)=\mu_{k+m-1}(F_k)=\cdots=\mu_k(F_k),$$

所以

$$\mu(F_k)=\mu_k(F_k).$$

又对任意 Borel 子集 $B\subset F_k$,有

$$\mu_k(B) = \frac{\mu_{k-1}(F_{k-1})}{\mu_{k-1}(F_{k-1} \cap \overline{E}_k)}\mu_{k-1}(B)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{\mu_j(F_j)}{\mu_j(F_j \cap \overline{E}_{j+1})}\right) \mathrm{mes}(B) = c_k \mathrm{mes}(B),$$

其中，$F_j \in E_j$，$F_j \subset F_{j-1}$，$j \geqslant k$，特别地，

$$\mu_k(F_k) = c_k \mathrm{mes}(F_k),\ \mu_k(F_k \cap \overline{E}_{k+1}) = c_k \mathrm{mes}(F_k \cap \overline{E}_{k+1}),$$

因此

$$\mu_k(B) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{\mathrm{mes}(F_j)}{\mathrm{mes}(F_j \cap \overline{E}_{j+1})}\right) \mathrm{mes}(B) \leqslant \mathrm{mes}(B) / \prod_{j=1}^{k-1} \Delta_j,$$

于是

$$\mu(F_k) = \mu_k(F_k) \leqslant \mathrm{mes}(F_k) / \prod_{j=1}^{k-1} \Delta_j).$$

另外，对任意 $r > 0$ 充分小，存在 k，使得 $d_k \leqslant r < d_{k-1}$，若 $x \in E$，则 $B_r(x)$ 是中心在 x、半径为 r 的闭球. 记

$$V = \bigcup \{F \in E_{k+1} \mid F \cap B_r(x) \neq \varnothing\},$$

则 $\mathrm{diam} V \leqslant 4r$，$\mu(B_r(x) \backslash V) = 0$，所以

$$\mu(B_r(x)) \leqslant \mu(V) = \sum_{\substack{F \in E_{k+1} \\ F \subset V}} \mu(F) \leqslant \sum_{\substack{F \in E_{k+1} \\ F \subset V}} \mathrm{mes}(F) / \prod_{j=1}^{k} \Delta_j$$

$$\leqslant \mathrm{mes}(V) / \prod_{j=1}^{k} \Delta_j \leqslant (4r)^n / \prod_{j=1}^{k} \Delta_j$$

$$\leqslant 4^n r^s \left[\frac{d_{k-1}^{n-s}}{\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_k}\right].$$

如果 $s < n - \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\sum_{j=1}^{k+1} |\log \Delta_j|}{|\log d_k|}$，则 $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \left[\dfrac{d_{k-1}^{n-s}}{\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_k}\right] = 0$，故存在 $c > 0$，当 r 充分小时，$4^n \left[\dfrac{d_{k-1}^{n-1}}{\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_k}\right] \leqslant c$，于是

$$\mu(B_r(x)) \leqslant cr^s,$$

由引理 4.5 得 $\dim(E) \geqslant s$. 由于 s 是任意的,因此命题得证. 证毕.

下面考虑 $f_\lambda(z) = \lambda e^z$, 记 $I = \left[-\frac{\pi}{4} - \arg\lambda, \frac{\pi}{4} - \arg\lambda\right]$, 定义

$$T_{x_0} = \{z \in \mathscr{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in I(\mathrm{mod}2\pi),\ \mathrm{Re}z > x_0\},$$

它由一族宽度为$\frac{\pi}{2}$的右边无穷的带域组成. 当 x_0 充分大时,如果 $z \in T_{x_0}$, 则 $\mathrm{Re}f_\lambda(z) > O(e^{\mathrm{Re}z})$, 因此,如果 $z \in T_{x_0}$ 满足 $f_\lambda^n(z) \in T_{x_0}$ $(\forall\ n \geqslant 0)$, 则 $f_\lambda^n(z) \to \infty (n \to \infty)$,因此 $z \in J(f_\lambda)$.

现在将 T_{x_0} 划分成一族边长为$\frac{\pi}{2}$的正方形,这些正方形两两不相交并填满整个 T_{x_0},记这些正方形的集合为 Γ. 由于 f_λ 在边长为 π 的正方形上是单叶的,由 Koebe 偏差定理(定理 4.5), f_λ 在每个 $B \in \Gamma$ 上有公共的有界偏差 K.

定理 8.22 $f_\lambda(z)$的 Julia 集 $J(f_\lambda)$有 Hausdorff 维数 2.

证明 当 x_0 充分大时,对任意 $B \in \Gamma$, $f_\lambda(B) \subset T_{x_0}$,且 $D = f_\lambda(B)$ 是一个充分大的扇形,记 $\mathscr{P}(D)$是 Γ 中所有位于 D 内的正方形集合, $P(D) = \bigcup \{P \mid P \in \mathscr{P}(D)\} \subset D$, 则密度 $\mathrm{den}(P(D), D) = \frac{\mathrm{mes}(P(D))}{\mathrm{mes}(D)}$ 充分接近于 1/4.

现在,任意取定 $B_1 \in \Gamma$,记 $E_1 = \{B_1\}$, 归纳定义 E_k 如下:

$$E_k = \{P \mid \text{存在 } F \in E_{k-1},\ P \subset F \text{ 且 } f_\lambda^k(P) \in \mathscr{P}(f_\lambda^k(F))\},$$

令 $\overline{E}_k \bigcup \{P \mid P \in E_k\}$, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{E}_k$, 则当 $z \in E$ 时, $f_\lambda^k(z) \in T_{x_0}\ k = 1, 2, \cdots$, 因此, $f_\lambda^k(z) \to \infty$, $E \subset J(f_\lambda)$, 见图 8.2.

对任意 $F_k \in E_k$, 考虑密度 $\mathrm{den}(\overline{E}_{k+1}, F_k) = \frac{\mathrm{mes}(\overline{E}_{k+1} \cap F_k)}{\mathrm{mes}(F_k)}$, 注意到 $\overline{E}_{k+1} \cap F_k = \bigcup \{P \mid P \subset F_k,\ f_\lambda^{k+1}(P) \in \mathscr{P}(f_\lambda^{k+1}(F_k))\}$, 故 $f_\lambda^{k+1}(\overline{E}_{k+1} \cap F_k) = P(f_\lambda^{k+1}(F_k))$, 因此,由 Koebe 偏差定理知道

$$\operatorname{den}(\overline{E}_{k+1},\ F_k) = \frac{\operatorname{mes}(\overline{E}_{k+1} \cap F_k)}{\operatorname{mes}(F_k)}$$

$$\geqslant \frac{1}{K^2} \frac{\operatorname{mes}(f_\lambda^{k+1}(\overline{E}_{k+1} \cap F_k))}{\operatorname{mes}(f_\lambda^{k+1}(F_k))}$$

$$= \frac{1}{K^2} \frac{\operatorname{mes}(P(f_\lambda^{k+1}(F_k)))}{\operatorname{mes}(f_\lambda^{k+1}(F_k))},$$

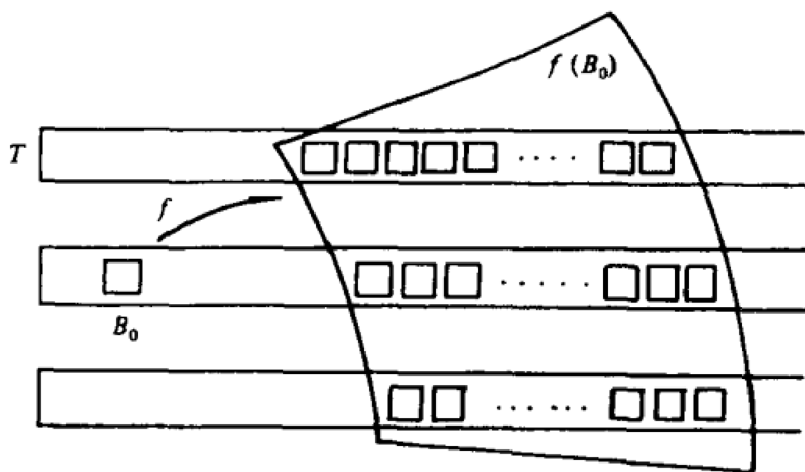


图 8.2 定理 8.22 的证明示意图

存在 $\varepsilon > 0$，当 k 充分大时，有

$$\operatorname{den}(\overline{E}_{k+1},\ F_k) \geqslant \frac{1}{K^2}\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) = \Delta > 0.$$

另一方面，当 $z \in T_{x_0}$ 时，$\operatorname{Re} f_\lambda(x) > O(e^{\operatorname{Re} z})$，易验证，对任意 $z \in F_k \in E_k$，有

$$|(f_\lambda^k)'(z)| = \prod_{j=1}^{k} |f_\lambda^j(z)| > 4 f_1^k(1),$$

而 $f_\lambda^k(F_k) \in \Gamma$，$\operatorname{diam}(f_\lambda^k(F_k)) \leqslant 4$，所以

$$\operatorname{diam}(F_k) \leqslant \operatorname{diam}(f_\lambda^k(F_k))/\min|(f_\lambda^k)'(z)| \leqslant d_k = \frac{1}{f_1^k(1)}.$$

显然，$|\log \Delta^k| / |\log d_k| \to 0 (k \to 0)$，由命题 8.3 可知，$\dim(E) = 2$，从而，$\dim(J(f_\lambda)) = 2$. 证毕.

注 利用第四章§4.3的方法可以证明：若 f_λ 有一个吸引或有理中性周期点，则 $J(f_\lambda)$ 的平面 Lebesgue 测度为 0.

§8.7.4 λe^z 的 M 集的维数

下面讨论 λe^z 的参数平面. 在 Misiurewicz 证明了 $J(e^z)=\mathscr{C}$ 后，Devaney，I. N. Baker 等进一步研究了集合

$$M=\{\lambda\in\mathscr{C}\mid J(\lambda e^z)=\mathscr{C}\},$$

指出：M 是一个相当复杂的集合(见图 8.3)，与 λe^z 的 Julia 集类似，M 也包含有一个 Cantor 束. 但我们对 M 集的了解还很少，例如，我们不知道 M 是否有内点. 在这儿，我们利用 McMullen 的方法，证明 M 的 Hausdorff 维数也为 2.

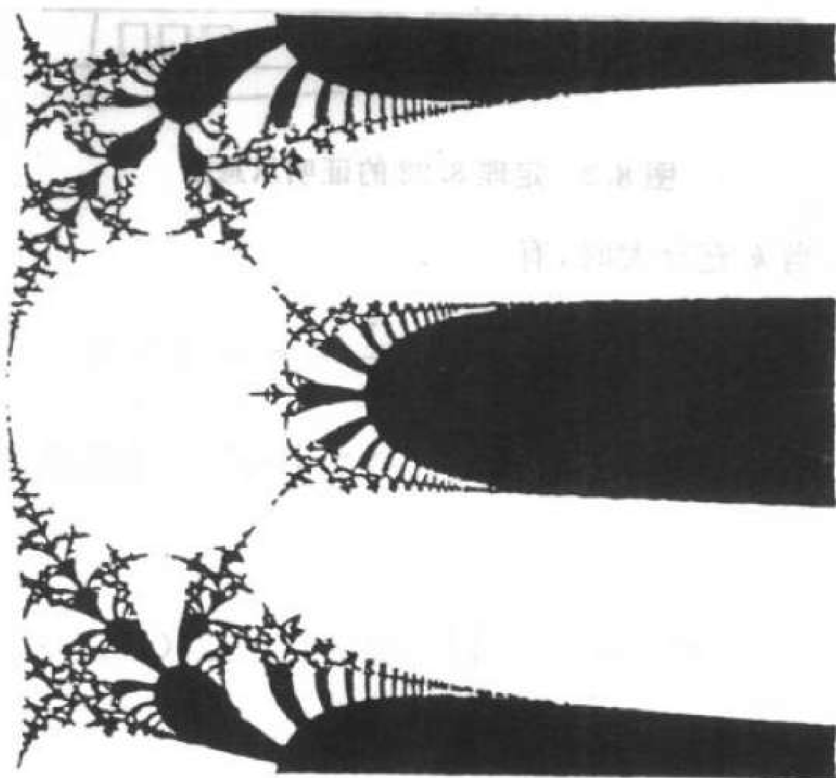


图 8.3 λe^z 的集合 M

在考虑 $f_\lambda(z)=\lambda e^z$ 的参数平面时，f_λ 的 0 轨道起了重要作用，由于 f_λ 是有限型整函数，0 是唯一奇点，则由 Fatou 分支的最终周期性定理与分类定理知，如果 f_λ 的 0 轨道趋于无穷或是最终周期的，则 $\lambda\in$

M.

下面考虑 f_λ 的 0 轨道,即

$$0, f_\lambda(0), f_\lambda^2(0), \cdots, f_\lambda^k(0), \cdots,$$

记 $G_k(\lambda) = f_\lambda^k(0)$, 显然

$$G_{k+1}(\lambda) = \lambda \exp G_k(\lambda).$$

设

$$S = \{\lambda \in \mathscr{C} \mid \mathrm{Im}\lambda \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k = 0, \pm 1, \cdots\},$$

且约定 S_0 是 S 的包含实轴的那个分支.

容易证明:如果 $\lambda \in S_0$, $\mathrm{Re}\lambda$ 充分大且 $G_k(\lambda) \in S$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 则 $\mathrm{Re}G_{k+1}(\lambda) > \exp \mathrm{Re}G_k(\lambda)$, $|G'_{k+1}(\lambda)| \geqslant f_1^k(\mathrm{Re}\lambda)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 因此, $G_k(\lambda) \in S$, $k = 1, 2, \cdots$ 蕴含着 $G_k(\lambda) \to +\infty (k \to \infty)$, $\lambda \in M$.

设 Q 为具有下列形式的矩形:

$$\left\{\lambda = x + \mathrm{i}y \,\middle|\, s < xs + 1, 2m\pi - \frac{\pi}{4} < y < 2m\pi + \frac{\pi}{4}\right\},$$

其中 s 为实数, m 为整数. 每个这种形式的矩形在 S 中,记这种矩形 Q 的集合为 Γ.

引理 8.18 设 $\lambda_0 \in S_0$, 且 λ_0 的实部为充分大的正数,记 $N = N(\lambda_0, \varepsilon)$ 为中心在 λ_0、半径为 ε 的圆域. 如果 $G_k(\lambda)$在 N 上单叶,则对 $G_k(N)$中的任一矩形 $Q \in \Gamma$, 只要距离 $d(Q, \partial G_k(N)) > 2$, 就有 $G_{k+1}(\lambda)$ 在 $G_k^{-1}(Q)$的在 N 中的分支上单叶.

证明 记

$$Q = \left\{\lambda = x + \mathrm{i}y \,\middle|\, s < x < s + 1, 2m\pi - \frac{\pi}{4} < y < 2m\pi + \frac{\pi}{4}\right\},$$

我们设 R 也是矩形,

$$R = \left\{\lambda = x + \mathrm{i}y \,\middle|\, s - 1 < x < s + 2, 2m\pi - \frac{\pi}{2} < y < 2m\pi + \frac{\pi}{2}\right\},$$

则 R 也含于 $G_k(N)$. 设 $F_{k+1}(\lambda)=\exp G_k(\lambda)$, 则 F_{k+1}在 $G_k^{-1}(R)$上单叶. 我们有

$$F_{k+1}\circ G_k^{-1}(Q)=\left\{re^{i\theta}\middle|e^s<r<e^{s+1},\ -\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}\right\},$$

且

$$F_{k+1}\circ G_k^{-1}(R)=\left\{re^{-i\theta}\middle|e^{s-1}<r<e^{s+2},\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right\},$$

这里 G_k^{-1} 为 G_k 反函数的分支,其像在 N 中.

如我们设 $\lambda_0=r_0e^{i\theta_0}$ 且 $\mathrm{Re}\lambda_0>A+\varepsilon$,则 $\lambda=re^{i\theta}\in N$ 满足:

$$A<r_0-\varepsilon<|\lambda|<r_0+\varepsilon,\ -(\pi+\varepsilon)/A<\arg\lambda<(\pi+\varepsilon)/A,$$

$G_{k+1}\circ G_k^{-1}(Q)$包含于下述形式的域中:

$$V=\{\lambda=re^{i\theta}|e^s(r_0-\varepsilon)<r<e^{s+1}(r_0+\varepsilon),$$

$$-\frac{\pi}{4}-(\pi-\varepsilon)/A<\theta<\pi/4+(\pi+\varepsilon)/A\},$$

且它包含域:

$$V'=\{\lambda=re^{i\theta}|e^s(r_0+\varepsilon)<r<e^{s+1}(r_0-\varepsilon),$$

$$-\frac{\pi}{4}+(\pi+\varepsilon)/A<\theta<\frac{\pi}{4}-(\pi+\varepsilon)/A\}.$$

现记

$$\widetilde{G}_{k+1}(\lambda)=\lambda_0F_{k+1}(\lambda),$$

则 $\widetilde{G}_{k+1}$在 $G_k^{-1}(R)$上单叶,且把 $G_k^{-1}(R)$映为

$$\widetilde{V}=\left\{\lambda=re^{i\theta}\middle|r_0e^{s-1}<r<r_0e^{s+2},\ -\frac{\pi}{2}+\theta_0<\theta<\frac{\pi}{2}+\theta_0\right\},$$

如果取 A 充分大,易见 $\widetilde{V}$包含 V,且对于

$$\lambda\in\partial G_k^{-1}(R),\ \zeta=G_k(\lambda)\in\partial R,$$

$\widetilde{G}_{k+1}(\lambda)$和 V 之间的距离大于 $\varepsilon e^{\mathrm{Re}\zeta}$.

记

$$H_{k+1} = G_{k+1} - w,\ \widetilde{H}_{k+1} = \widetilde{G}_{k+1} - w,$$

这里 w 为 V 中一点,则对于 $\lambda \in \partial G_k^{-1}(R)$, $\zeta = G_k(\lambda) \in \partial R$, 有

$$|\widetilde{H}_{k+1}(\lambda)| = |\widetilde{G}_{k+1}(\lambda) - w| \geqslant d(\widetilde{G}_{k+1}(\lambda), V) > \varepsilon e^{\mathrm{Re}\zeta},$$

且

$$|H_{k+1}(\lambda) - \widetilde{H}_{k+1}(\lambda)| = |\lambda e^{\zeta} - \lambda_0 e^{\zeta}| = |\lambda - \lambda_0| e^{\mathrm{Re}\zeta} < \varepsilon e^{\mathrm{Re}\zeta}.$$

由 Rouché 定理,$G_{k+1} \circ G_k^{-1}(R)$通过 G_{k+1}覆盖 V 一次,从此便导出引理 8.18 的结论. 证毕.

现在来构造 § 8.7.3 中提及的 E 和 E_k,并要求对于每个 k,每个 $F \in E_k$, G_{k+1} 在 F 上单叶且有与 k 和 F 无关的有界偏差.

设 λ_0 为充分大的正实数. $N = D(\lambda_0, 10)$, $Q \in \Gamma$ 的中心在 λ_0,则 $Q \subset S_0$. 设 P 也是中心在 λ_0 的矩形,其边长为 Q 的一半. 因为 $G_1 = id$ 在 N 上单叶,G_2 在 $Q = G_2^{-1}(Q)$ 上单叶(由引理 8.18),且在 P 上有有界偏差(由定理 4.5),记

$$F_1 = P,\ E_1 = \{F_1\},\ \overline{E}_1 = F_1.$$

再把 S 分为 Γ 中的若干矩形 Q,对每一个 Q,如上作 P,记如此的在 Q 中的 P 为 $P \circ\!\subset Q$.

设我们已经定义了 $E_j = \{F_j\}$, $\overline{E}_j = \bigcup F_j \subset \overline{E}_{j-1} \subset \overline{E}_1 (1 \leqslant j \leqslant k-1)$,$G_{j+1}$ 在每个 F_j 上单叶,具有有界偏差 K. 另外,我们要求 $G_j(F_j)$是 P 形式的集合. 显然,对 $\forall\, \lambda \in \overline{E}_j$, $G_j(\lambda) \in S$.

设 F_{k-1}在 E_{k-1}中,则 $G_k(F_{k-1})$包含一个大的扇域. 我们把那些在 $G_k(F_{k-1})$中且满足距离 $d(\partial G_k(F_{k-1}), Q) > 2$ 的 $Q \in \Gamma$ 的集合记为 $\mathscr{Q}_{k-1}(F_{k-1})$,则由引理 8.18 和定理 4.5, G_{k+1} 在 $G_k^{-1}(Q)$ 上单叶,在 $G_k^{-1}(P)$ 上有有界偏差 K,这里 $P \circ\!\subset Q$. 定义

$$E_k = \{F_k | F_k \subset F_{k-1} \in E_{k-1},\ 且\ G_k(F_k) = P \circ\!\subset Q \subset \mathscr{Q}_{k-1}(F_{k-1})\},$$

且

$$\overline{E}_k = \bigcup \{F_k | F_k \in E_k\},$$

记 $E = \bigcap \overline{E}_k$. 对任 $\lambda \in E$, $G_k(\lambda)$ 属于某一 $Q \in \Gamma$. 所以 $G_k(\lambda) \in S$,从而 $G_k(\lambda)$ 趋于 ∞,由定理 8.12 知,$E \subset M$.

定理 8.23 f_λ 的 M 集具有 Hausdorff 维数 2.

证明 由 F_k 的构造,$G_k(F_k)$是如下形式的矩形:

$$P = \left\{\lambda = x + \mathrm{i}y \,\middle|\, s < x < s + \frac{1}{2},\ 2m\pi - \frac{\pi}{8} < y < 2m\pi + \frac{\pi}{8}\right\},$$

所以

$$\mathrm{diam}(F_k) \leqslant \mathrm{diam}(P) / \min_{\lambda \in F_k} |G_k'(\lambda)|,$$

而

$$|G_k'(\lambda)| \geqslant f_1^k(\mathrm{Re}\lambda) > f_1^k(1),$$

所以 $\quad \mathrm{diam}(F_k) \leqslant 1/f_1^k(1)$.

现在证明当 k 充分大时,$\mathrm{den}(\overline{E}_{k+1}, F_k) \geqslant \Delta > 0$. 因为 λ_0 为 F_1 中的大的实数,$G_{k+1}(F_k)$含于

$$V_k' = \left\{\lambda = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \,\middle|\, \mathrm{e}^s(\lambda_0 - 1) < r < \mathrm{e}^{s+\frac{1}{2}}(\lambda_0 + 1),\ -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4\lambda_0} < \theta < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4\lambda_0}\right\},$$

且它包含

$$V_k = \left\{\lambda = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \,\middle|\, \mathrm{e}^s(\lambda_0 + 1) < r < \mathrm{e}^{s+\frac{1}{2}}(\lambda_0 - 1),\ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4\lambda_0} < \theta < \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4\lambda_0}\right\},$$

计算得

$$\frac{\mathrm{mes}(V_k)}{\mathrm{mes}(V_k')} = \frac{\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{2\lambda_0}}{\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2\lambda_0}} \cdot \frac{\mathrm{e}(\lambda_0 - 1)^2 - (\lambda_0 + 1)^2}{\mathrm{e}(\lambda_0 + 1)^2 - (\lambda_0 - 1)^2} = L,$$

这里 L 与 S 无关,从而与 k, F_k 无关. 设 T_k 为 V_k 的最大子扇形域,它距 ∂V_k 的距离大于 4,则当 k 充分大时,$\mathrm{mes}(T_k)/\mathrm{mes}(V_k)$很接近 1,$\mathrm{mes}(T_k \cap S)/\mathrm{mes}(T_k)$ 很接近 1/4(它们均与 F_k, E_k 无关),所以

$$\mathrm{mes}(T_k)/\mathrm{mes}(V_k) \geqslant 1 - \alpha > 0,$$

且

$$\mathrm{mes}(T_k \cap S)/\mathrm{mes}(T_k) \geqslant 1/4 - \beta > 0$$

对于所有充分大的 k 成立，这里 α, β 与 k, F_k 无关. 设 $\mathscr{Q}_k(F_k)$为前述矩形 Q 的集合，则

$$T_k \cap S = T_k \cap [\bigcup \{Q | Q \in \mathscr{Q}_k(F_k)\}],$$

所以，由 Koebe 偏差定理得

$$\begin{aligned}
\mathrm{den}(\overline{E}_{k+1}, F_k) &= \frac{\mathrm{mes}(\overline{E}_{k+1} \cap F_k)}{\mathrm{mes}(F_k)} \\
&\geqslant \frac{1}{K^2} \frac{\mathrm{mes}(G_{k+1}(F_k) \cap G_{k+1}(\overline{E}_{k+1}))}{\mathrm{mes}(G_{k+1}(F_k))} \\
&\geqslant \frac{1}{4K^2} \frac{\mathrm{mes}(V_k \cap [\bigcup \{Q | Q \in \mathscr{Q}_k(F_k)\}])}{\mathrm{mes}(V_k')} \\
&\geqslant L(1-\alpha)\left(\frac{1}{4} - \beta\right)/4K^2 = \Delta > 0.
\end{aligned}$$

由命题 8.3，定理 8.23 得证. 证毕.

§8.8 亚纯函数迭代理论简介

以上各节介绍了超越整函数的迭代理论，即$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}$的解析自映射的迭代动力学性质. 本节介绍复平面上亚纯函数 $\mathscr{C} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$ 的迭代. 这种迭代不是自映射，对于超越亚纯函数，我们无法给出∞的前向轨道，就是说，当轨道跑出$\mathscr{C}$后，便无法进行下去.

定义 8.2 设 f 为超越亚纯函数，任取 $z_0 \in \mathscr{C}$，如果存在 z_0 的一个邻域U，在U 上 $f^n(z) \in \mathscr{C}(n = 0, 1, 2, \cdots)$，且$\{f^n | U\}$为正规族，则称 z_0 为稳定点. 稳定点的集合称为 Fatou 集，并记之为 $F(f)$，其余集 $J(f) = \overline{\mathscr{C}} \backslash F(f)$ 称为 Julia 集.

记 f 的极点的集合为 A，且

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A),$$

如果 $A \neq \varnothing$，则由 Picard 定理，B 为一个无穷集合，或者 B 为单点集且此点和∞构成完全不变集. 由定义 8.2 可见 Fatou 集为开集，Julia 集为闭集，$\overline{B} \subset J(f)$，$f^{-1}(J(f)) \subset J(f)$，$f(J(f)) \subset J(f) \cup \{\infty\}$，从而易见 $J(f) \neq \varnothing$.

如果一点 $z \in \mathscr{C}$，满足 $O^-(z) = \{f^{-n}(z) | n \in \mathscr{N}\}$ 为有穷集合，则称 z 为 f 的例外点，记 f 的例外点集为$E(f)$.

命题 8.4 任取 $q \in J(f)$ 及任意 $p \notin E(f)$，则 q 是 $O^-(p)$的一个极限点.

如果 $\infty \notin E(f)$，由上述命题得 $J(f) \subset B' \subset J(f)'$，从而，$J(f)$ 是完全集. 关于周期点及其分类完全同整函数的情况，我们有下述定理.

定理 8.24 设 f 为超越亚纯函数，则排斥周期点在 $J(f)$上稠密.

在整函数的迭代理论中我们已经知道多连通的 Fatou 分支必是有界且游荡的. 关于亚纯函数，情况则不大相同，比如存在多连通的无界的 Fatou 分支，因此我们有定理 8.25.

定理 8.25 设 k 为任一自然数，则存在亚纯函数 $f_j(j = 1, 2, 3$ $4)$，使得

1) $F(f_1)$有一个 k 连通的有界的游荡域；

2) $F(f_2)$有一个 k 连通的无界的游荡域；

3) $F(f_3)$有一个无穷连通的有界游荡域；

4) $F(f_4)$有一个无穷连通的无界游荡域.

定理 8.26 设 f 为超越亚纯函数，D_0 为 f 的一个不变域，即$F(f)$的一个周期为 1 的周期分支，则 D_0 的连通数为 0，1 或∞.

关于 $F(f)$的周期分支，有下述分类定理.

定理 8.27 设 f 为超越亚纯函数，D_0 为 $F(f)$的一个周期为 p 的周期分支，则 D_0 为以下四种域之一：

1) 吸引或超吸引周期域；

2) 抛物型周期域，即存在 $z_0 \in \partial D$，$f^{np}(z)$ 在 D 上局部一致收敛

于 z_0；

3) Siegel 盘；

4) Herman 环.

如果 f^{-1}的所有奇点只有有限个，则称 $f \in S$. 我们有定理 8.28.

定理 8.28 设 f 为 S 中的超越亚纯函数，则 f 没有游荡域.

对于整函数，我们知道其完全不变域至多有一个. 然而，对亚纯函数情况则不相同，于是，我们有定理 8.29.

定理 8.29 设 $f \in S$ 为超越亚纯函数，则 $F(f)$至多有两个完全不变分支.

关于亚纯函数还有一些动力学性质，它们与整函数既有差异，同时也保持许多典型性质. 有关内容请参见文献[BKL1, BKL2, BKL3, BKL4].

参考文献

[Va] G. Valiron, *Fonctions analytiques*, Press Univ. de France, Paris, 1954.

[Er] A. E. Eremenko, On the iteration of entire functions, *Dyn. Syst. Erg. Th.*, *Banach Center Publ.* Vol. 23, Warszawa, 1989, 339-345.

[Ha] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[Br] M. Brelot, *El ements de la theorie classique du potential*, 2nd ed., Centre de Documentation, Paris, 1961.

[He] M. R. Herman, Are there critical points on the boundaries of singular domains? *Comm. Math. Phys.* 99 (1985), 593-612.

[EL] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, Iterates of entire functions, *Dokl. Akad. Nuak SSSR*, 279 (1984), 25-27.

[EL1] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, *Iterates of entire functions*, *Preprint* No. 6, 1984. *Fiz.-Tekhn. Inst.* Nizkikh Temperature. *Akad. Nauk Ukr. SSR*, *Kharkov*, 1984

(Russian).

[Ja] M. C. Yang, Julia set of the function zexp$(z+\mu)$, *Tohoku Math. J.* 44 (1992), 271-277.

[Ne] R. Nevanlina, *Eindeutige Analytische Fonktionen.* Springer-Verlag, 1936.

[DK] R. L. Devaney and M. Krych, Dynamics of exp(z). *Erg. Th. and Dyn. Sys.* 4 (1984), 35-52.

[De] R. L. Devaney, Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N. S.*) 11 (1984), 167-171.

[Mc] C. McMullen, Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 300 (1987), 329-342.

[BKL1] I. N. Baker, J. Kotus and Y. Lü, Iterates of meromorphic functions I. *Erg. TH. & Dyn. Sys.* 11 (1991), 241-248.

[BKL2] I. N. Baker, J. Kotus and Y. Lü, Iterates of meromorphic functions Ⅱ: Example of wandering domains. *J. London Math. Soc.* (2) 42 (1990), 267-278.

[BKL3] I. N. Baker, J. Kotus and Y. Lü, Iterates of meromorphic functions Ⅲ: Periodic domains. *Erg. Th. & Dyn. Sys.* 11 (1991), 603-618.

[BKL4] I. N. Baker, J. Kotus and Y. Lü, Iterates of meromorphic functions Ⅳ: Critical finite functions. *Results Math.* 22 (1992), 651-656.

[Lü] Yinian Lü, On the proof of Sullvan's eventual periodicity theorem. *Acta Math. Sinica*, 5(4)(1989), 355-364.

[Qi1] Jiang-Yong Qiao, The Julia set of the mapping $z \mapsto$ zexp$(z+\mu)$. *Chinese Science Bulletin* 39(7)(1994), 529-533.

[Qi2] Jiang-Yong Qiao, Stable sets of iteration of entire functions.

Acta Mathematatica Sinica, 37(5)(1994), 702-708.

[Qi3] Jiang-Yong Qiao, Julia set for entire functions and its derivatives. *Chinese Sci. Bull.* 38(15)(1993), 1359-1360.

第九章　函数族的随机迭代动力系统

以上各章讨论了单个解析函数的迭代问题,以后称之为经典的迭代问题.受分形几何中构造分形的迭代函数系方法的启发,1990年,周维民、任福尧研究了多个解析函数迭代生成的动力系统[ZR1, ZR2, ZR3],称之为随机迭代动力系统.本章介绍这方面的若干工作.

§9.1　基本概念

设$f_1, f_2, \cdots, f_M$为M个整函数或亚纯函数,记

$$\mathscr{F}=\{f_1, f_2, \cdots, f_M\},$$

再记

$$\Sigma_M=\{(j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots)\mid j_i\in\{1,2,\cdots,M\}, i=1,2,\cdots,n,\cdots\},$$

任取Σ_M中一元素$\sigma=(j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots)$,定义$\mathscr{F}$关于$\sigma$的迭代序列$\{W_\sigma^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$如下:

$$W_\sigma^1(z)=f_{j_1}(z),$$

$$W_\sigma^2(z)=f_{j_2}\circ f_{j_1}(z),$$

$$\cdots\cdots,$$

$$W_\sigma^{n+1}(z)=f_{j_{n+1}}\circ W_\sigma^n(z)=f_{j_{n+1}}\circ f_{j_n}\circ\cdots\circ f_{j_1}(z),$$

$$\cdots\cdots;$$

定义$\{W_\sigma^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$的逆序列$\{W_\sigma^{-n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$如下:

$$W_\sigma^{-n}(z)=(W_\sigma^n)^{-1}(z)=f_{j_1}^{-1}\circ f_{j_2}^{-1}\circ\cdots\circ f_{j_n}^{-1}(z).$$

有时为方便计，用 $W_{\sigma(n)}(z)$ 表示 $W_\sigma^n(z)$，用 $W_{\sigma(n)}^{-1}(z)$ 表示 $W_\sigma^{-n}(z)$. 另外，我们定义序列 $\{W_{\sigma(n)}^{-1}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 如下：

$$W_{\sigma(1)}^{-1}(z) = f_{j_1}^{-1}(z),$$

$$W_{\sigma(2)}^{-1}(z) = f_{j_2}^{-1} \circ f_{j_1}^{-1}(z),$$

……

$$W_{\sigma(n+1)}^{-1}(z) = f_{j_{n+1}}^{-1} \circ W_{\sigma^{-1}(n)}(z) = f_{j_{n+1}}^{-1} \circ f_{j_n}^{-1} \circ \cdots \circ f_{j_1}(z),$$

…….

以下引入四个定义.

定义 9.1 设 $z_0 \in \hat{\mathscr{C}}$，若存在 z_0 的邻域 U，使得对于任何 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{W_\sigma^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 U 上均有定义，且在 Montel 意义下，$\{W_\sigma^n(z)|U\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个正规函数族，则称 z_0 为 $\mathscr{F}$ 的一个正规点(或稳定点). 由全体正规点组成的集合称为 $\mathscr{F}$ 的 Fatou 集，记之为 $F(\mathscr{F})$，或简记为 F；Fatou 集 $F(\mathscr{F})$ 的余集称为 $\mathscr{F}$ 的 Julia 集，记为 $J(\mathscr{F})$，或简记为 J.

以后，我们把 $\mathscr{F}$ 中任一元素 f_i 的 Julia 集和 Fatou 集 $J(f_i)$ 和 $F(f_i)$ 称为经典的 Julia 集和经典的 Fatou 集，并分别记之为 J_i 和 F_i (见图 9.1—9.3).

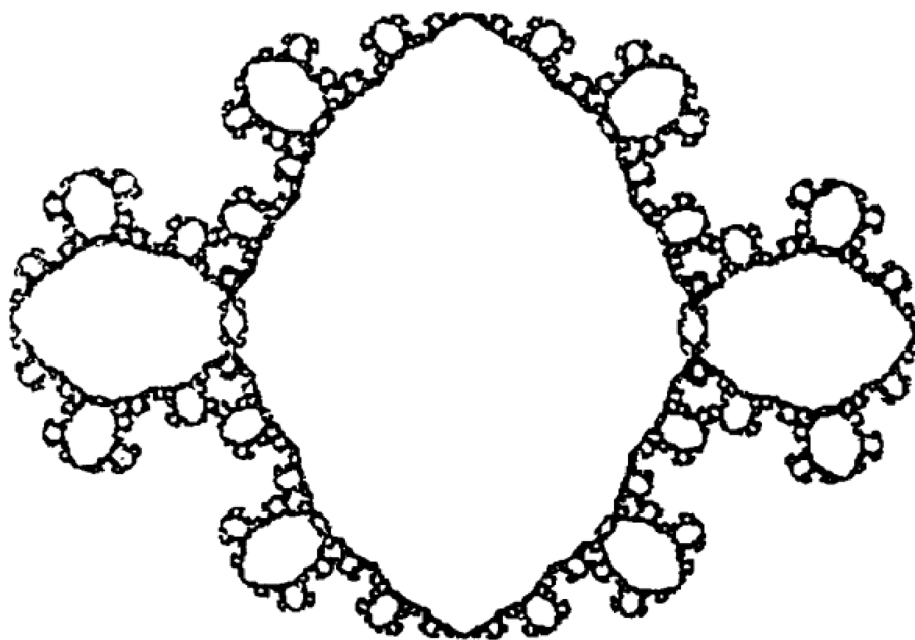


图 9.1 $R = \{p_1(z) = z^2 - 0.3125,\ p_2(z) = z^2 + 2\}$ 的 Julia 集

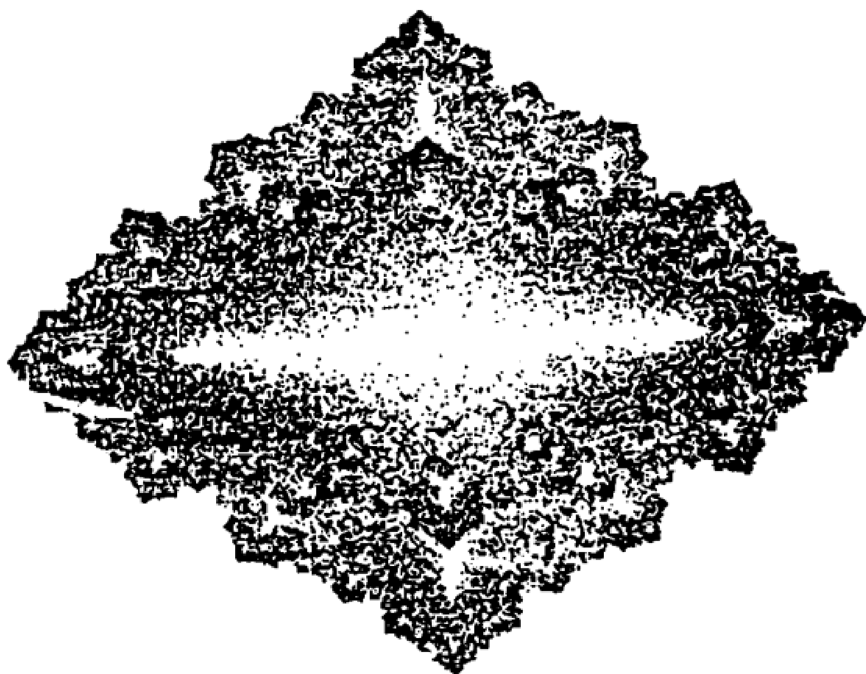


图 9.2 $R=\{p_1(z)=z^2,\ p_2(z)=z^2-1\}$ 的 Julia 集

定义 9.2 设 $z_0\in\hat{\mathscr{C}}$，z_0 称为是系统 $\mathscr{F}$ 的一个(超吸引、吸引、中性或)排斥周期点，如果存在某个 $\sigma_0\in\Sigma_M$ 以及某个正整数 n_0，使得

$$W_{\sigma_0}^{n_0}(z_0)=z_0,$$

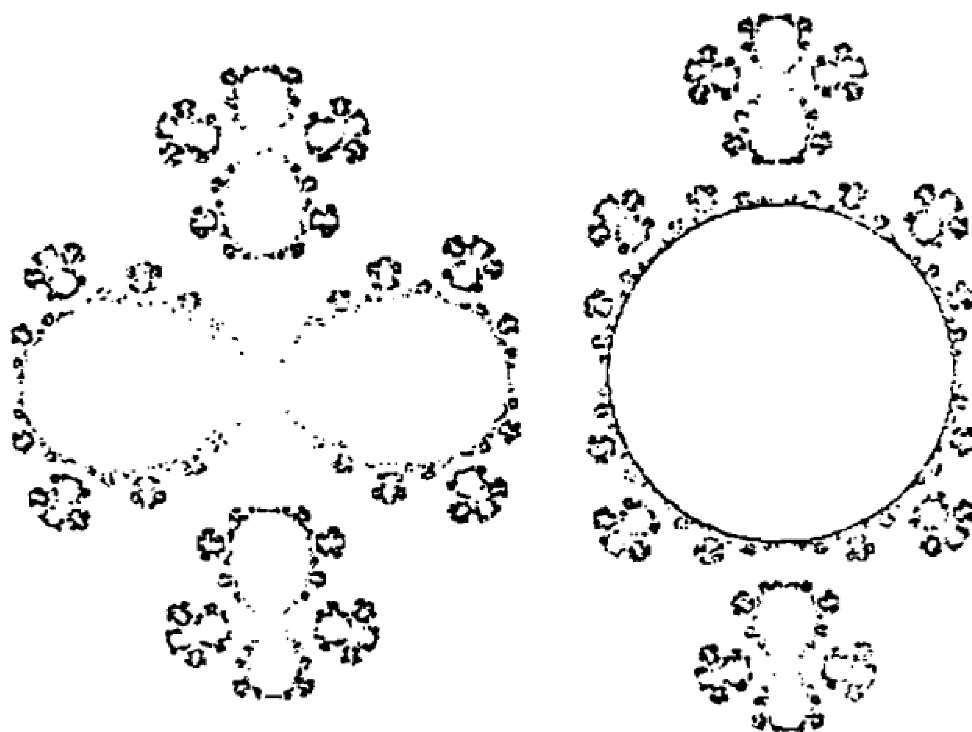
且 $\lambda=0$，或 $|\lambda|<1$，或 $|\lambda|=1$ 或 $|\lambda|>1$，其中 $\lambda=(W_{\sigma_0}^{n_0})'(z_0)$ 称为周期点 z_0 的特征值.

定义 9.3 设 $\mathscr{F}$ 由有限多个有理函数所组成，$J(\mathscr{F})$ 为 $\mathscr{F}$ 的 Julia 集，对任意一点 $z_0\in J(\mathscr{F})$，设 U 为 z_0 的任一邻域，记

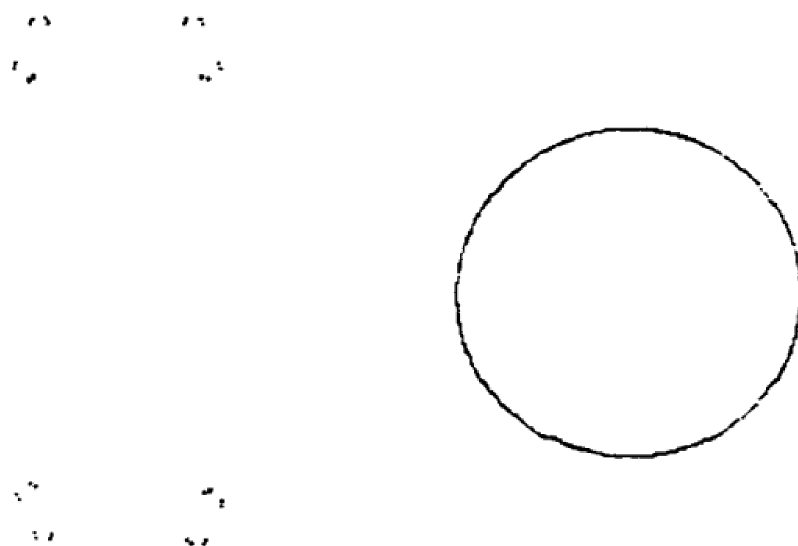
$$E_U=\hat{\mathscr{C}}\setminus\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U),$$

则称 $E_{z_0}=\bigcup\limits_U E_U$ 为 $\mathscr{F}$ 关于 z_0 的例外点集，其中对 E_U 取并时，U 取遍 z_0 的所有邻域.

定义 9.4 设 $\mathscr{F}$ 是由有限多个超越整函数或超越亚纯函数所组成，则复球面 $\hat{\mathscr{C}}$ 上一点 z_0 称为 $\mathscr{F}$ 的例外点，如果对任何 $f_i\in\mathscr{F}$，z_0 均是 f_i 的 Picard 例外值.



(a) $J(p_1, p_2)$



(b) $J(p_1)$与 $J(p_2)$

图 9.3 $J(p_1, p_2)$与经典的 $J(p_1)$，$J(p_2)$的比较，其中

$p_1(z) = z^2 + 3z + 2.75$，$p_2(z) = z^2 - 3z - 3.75$

§9.2 有理函数组的迭代动力学系统

在这一节中，我们讨论由有限个有理函数随机迭代生成的动力系统. 将用 R_i 表示有理函数，而用$\widetilde{\mathscr{R}}$表示有理函数组生成的随机迭代动力系统.

记$\widetilde{\mathscr{R}}$为 M 个有理函数 R_1, R_2, …, R_M 所组成的函数集合. 我们在第二章中已知，$J(R_i)$和 $F(R_i)$均在映射 R_i 下是完全不变的. 然而$\widetilde{\mathscr{R}}$的随机迭代的 Julia 集和 Fatou 集将未必是完全不变的，它们仅具有下述不变性.

命题 9.1 系统$\widetilde{\mathscr{R}}$的 Fatou 集 $F(\widetilde{\mathscr{R}})$是前向不变的开集，即任取 $z \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$，及任取 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$，有 $R_i(z) \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$，其中 $i = 1, 2, \cdots, M$. 同时$\widetilde{\mathscr{R}}$的 Julia 集是后向不变的闭集，即若 $z \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，则对于任一 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$，有 $R_i^{-1}(z) \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，其中 $i = 1, 2, \cdots, M$.

证明 首先由 $F(\widetilde{\mathscr{R}})$的定义，$F(\widetilde{\mathscr{R}})$是开集. 现设 $\xi \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$，由定义知，存在 ξ 的某一邻域 U，使得对任何 $\sigma \in \Sigma_M$，$\sigma = (j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots)$，$\{W_\sigma^n(z)|U\}_{n=1}^{\infty}$是一正规族. 记

$$\tau = (i, \sigma) = (i, j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots),$$

则 $\tau \in \Sigma_M$，对所有的 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{W_\tau^n(z)|U)_{n=1}^{\infty}$也是正规族，所以对任何 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{W_\sigma^n(R_i(z))|R_i(U)\}_{n=1}^{\infty}$是正规的. 由于 R_i 是非常数全纯函数，所以 $R_i(U)$是 $R_i(\xi)$的邻域，因而 $R_i(\xi) \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$.

因为 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是 $F(\widetilde{\mathscr{R}})$的余集，所以 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是闭集，设 $\xi \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，则 $\xi \notin F(\widetilde{\mathscr{R}})$，所以对任何 $R_i \in (\widetilde{\mathscr{R}})$，$i = 1, 2, \cdots, M$，$R_i^{-1}(\xi) \notin F(\widetilde{\mathscr{R}})$，否则，若 $R_i^{-1}(\xi) \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$，那么由于 $F(\widetilde{\mathscr{R}})$是前向不变的，故将含有 $\xi = R_i(R_i^{-1}(\xi)) \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$，这是矛盾的. 从而，$J(\widetilde{\mathscr{R}})$是向后不

变的. 证毕.

定理 9.1 设 $z \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$, E_z 为关于 z 的例外点集.

1) 若 E_z 仅含有一个点,则存在 Möbius 变换 T,使得对任何 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$, $i = 1, 2, \cdots, M$, $T \circ R_i \circ T^{-1}$ 为多项式;

2) 若 E_z 含有两个点,则存在 Möbius 变换 T,使得对任何 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$, $i = 1, 2, \cdots, M$, $T \circ R_i \circ T^{-1} = K_i z^{\pm d_i}$, 其中 d_i 为 R_i 的度, K_i 为某一常数,且其中的正负号取法如下:若 E_z 包含的是 R_i 的两个不动点,则取正号;若 E_z 包含的是 R_i 的一个周期为 2 的周期点,则取负号,而且在上述两种情形中, E_z 均与 $z \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 的选取无关, E_z 中的点均属于 Fatou 集.

证明 首先我们证明对任何 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$, $i = 1, 2, \cdots, M$, 均有

$$R_i^{-1}(E_z) = E_z.$$

设 $\xi \in R_i^{-1}(E_z)$, 则存在 $\eta \in E_z$, 使得 $R_i(\xi) = \eta$. 如果 $\xi \in E_z$, 则由定义知,存在 z 的邻域 U,使得

$$\xi \in \bigcup_{\sigma \in \Sigma_M} \bigcup_{n \geqslant 0} W_\sigma^n(U).$$

因此,存在 $n_0 \geqslant 0$ 以及 $\tau \in \Sigma_M$, 使得 $\xi \in W_\tau^{n_0}(U)$, 所以

$$\eta = R_i(\xi) \in R_i \circ W_\tau^{n_0}(U),$$

这与 $\eta \in E_z$ 相矛盾,因此可知,对任何 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$, $i = 1, 2, \cdots, M$, $R_i^{-1}(E_z) \subset E_z$. 又因为 E_z 至多含有两点,而 R_i^{-1} 不可能将两个不同点映射到同一点,所以对任一 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$, $i = 1, 2, \cdots, M$, 均有 $E_z = R_i^{-1}(E_z)$.

现假设 E_z 仅含有一个点,令 T 为 Möbius 变换,使得 T 将 E_z 中的那一点映射为 ∞,则由 E_z 的性质: $R_i^{-1}(E_z) = E_z$ 知, $p_i(z) = T \circ R_i \circ T^{-1}(z)$ 在 $\mathscr{C}$ 上无极点,所以对任何 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$, $i = 1, 2, \cdots, M$, $p_i(z)$ 都是多项式.

现假设 E_z 中含有两个点，令 T 为任一 Möbius 变换，它将 E_z 中的两个点分别映射为 0 和∞. 记 $p_i(z) = T \circ R_i \circ T^{-1}(z)$，若 0 和$\infty$是 $p_i(z)$的不动点，则$p_i(z)$为多项式，而且 0 是 p_i 的重数为 d_i 的零点. 因为 0 是 $p_i(z)$的唯一零点，所以 $p_i(z) = k_i z^{+d_i}$，其中 K_i 为某一常数，$d_i = \deg(R_i)$，$i = 1, 2, \cdots, M$. 若 0 和∞恰好构成 $p_i(z)$的一个周期为 2 的周期轨道，则类似地我们可得到 $p_i(z) = K_i z^{-d_i}$，其中 K_i 为某一常数，$d_i = \deg(R_i)$，$i = 1, 2, \cdots, M$.

在情形 1)中，E_z 中所含的唯一的一个点对于每个 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$，$i = 1, 2, \cdots, M$ 来说，均为超吸引不动点，所以可以找到 E_z 的一个邻域 U，使得对任一 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$，均有 $R_i(U) \subset U$，从而对任何 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{W_\sigma^n(U)\}_{n=1}^\infty$包含在 U 内，故$\{W_\sigma^n(U)\}_{n=1}^\infty$至少遗漏复平面上三个不同点，由 Montel 定理知，$E_z \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$.

对于情形 2)，E_z 中所含的两个点或者是 R_i 的两个超吸引不动点，或者为 R_i 的一个周期为 2 的超吸引周期点，因而可以找到 E_z 中两个点的两个邻域 U_1 和 U_2，使得对于每个 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$，$i = 1, 2, \cdots, M$，或者有 $R_i(U_1) \subset U_1$，$R_i(U_2) \subset U_2$，或者有 $R_i(U_1) \subset U_2$，$R_i(U_2) \subset U_1$，所以对于任何 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{W_\sigma^n(U_1)\}_{n=1}^\infty$和$\{W_\sigma^n(U_2)\}_{n=1}^\infty$都至少遗漏复平面上三个互不相同的点，所以有 $E_z \subset F(\widetilde{\mathscr{R}})$.

若 $E_z \neq \varnothing$，则由上可知，R_i 或者都共轭于多项式，或者共轭于形式为 $K_i z^{\pm d_i}$的有理函数. 对于第一种情形，我们取 $U = \hat{\mathscr{C}} \backslash \{0\}$，而对于第二种情形，我们取 $U = \hat{\mathscr{C}} \backslash \{0, \infty\}$，则对于任何 $z \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，均有 $E_U = E_z$，所以 E_z 是不依赖于点 z 的选取的. 证毕.

由于 E_z 与 z 的选取无关，我们将$\widetilde{\mathscr{R}}$的例外点集记为 $E(\widetilde{\mathscr{R}})$.

定理 9.2 如果 $z \in \hat{\mathscr{C}} \backslash E(\widetilde{\mathscr{R}})$，则有

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \subset \{[\bigcup_{\sigma \in \Sigma_M} \bigcup_{n \geqslant 0} W_\sigma^{-n}(z)] \text{的凝聚点集}\}.$$

证明 设 $z \in \overline{\mathscr{C}} \backslash E(\widetilde{\mathscr{R}})$，则对任 $\xi \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 及 ξ 的任一邻域 U 有

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0}W_\sigma^n(U)\supset\{z\},$$

所以存在 $\tau\in\Sigma_M$ 以及 $n_0>0$，使得

$$W_\tau^{n_0}(U)\supset\{z\},$$

因此存在 $\eta\in U$，满足 $W_\tau^{n_0}(\eta)=z$，即 $\eta\in\{W_\tau^{-n_0}(z)\}$．因为 U 可以任意小，所以 ξ 是 $\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0}W_\sigma^{-n}(z)\}$ 的凝聚点. 证毕.

命题 9.2 如果 $z\in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，则

$$J(\widetilde{\mathscr{R}})=\mathrm{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0}W_\sigma^{-n}(z)\}.$$

证明 首先由上一定理知道

$$J(\widetilde{\mathscr{R}})\subset\mathrm{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0}W_\sigma^{-n}(z)\}.$$

又由于 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 是后向不变的，而 $z\in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，因此有

$$J(\widetilde{\mathscr{R}})\supset\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0}W_\sigma^{-n}(z)\}.$$

最后再由 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 是闭集知 $J(\widetilde{\mathscr{R}})\supset\mathrm{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0}W_\sigma^{-n}(z)\}$．证毕.

定理 9.3 如果 $z\in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，则有

$$J(\widetilde{\mathscr{R}})=\mathrm{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0}W_{\sigma^{-1}(n)}(z)\}.$$

证明 由于 $E(\widetilde{\mathscr{R}})\subset F(\widetilde{\mathscr{R}})$，所以 $z\notin E(\widetilde{\mathscr{R}})$，故对任意 $\xi\in J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 以及 ξ 的任何邻域 U，有

$$\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0}W_\sigma^n(U)\supset\{z\},$$

因而可找到某个 $\sigma_0\in\Sigma_M$ 及 $n_0\geqslant 0$，使得 $\{z\}\subset W_{\sigma_0}^{n_0}(U)$，亦即存在 $\xi\in U$，使得 $W_{\sigma_0}^{n_0}(\xi)=z$．设 $\sigma_0=(j_1, j_2, \cdots)$，则

$$z=R_{j_{n_0}}\circ\cdots\circ R_{j_1}(\xi),$$

即

$$\xi = R_{j_1}^{-1} \circ \cdots \circ R_{j_{n_0}}^{-1}(z).$$

现取 $\sigma_1 = (j_{n_0}, \cdots, j_2, j_1, \cdots)$，则 $\xi = W_{\sigma_1^{-1}(n_0)}(z)$，所以 ξ 是

$$\{ \bigcup_{\sigma \in \Sigma_M} \bigcup_{n \geqslant 0} W_{\sigma^{-1}(n)}(z) \}$$

的凝聚点. 再由 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$的后向不变性及 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是闭集知

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) = \text{Closure}\{ \bigcup_{\sigma \in \Sigma_M} \bigcup_{n \geqslant 0} W_{\sigma^{-1}(n)}(z) \}.$$

证毕.

命题 9.3 设 $J(R_i)$是 R_i 的 Julia 集，其中 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$, $i = 1, 2, \cdots, M$，则

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) = \text{Closure}\{ \bigcup_{\sigma \in \Sigma_M} \bigcup_{n \geqslant 0} W_\sigma^{-n}(\bigcup_{i=1}^{M} J(R_i)) \},$$

所以有

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \supset \bigcup_{i=1}^{M} J(R_i).$$

证明 由 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$的定义知，$J(R_i) \subset J(\widetilde{\mathscr{R}})$，所以有

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \supset \{ \bigcup_{\sigma \in \Sigma_M} \bigcup_{n \geqslant 0} W_\sigma^{-n}(\bigcup_{i=1}^{M} J(R_i)) \}.$$

因为 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是闭集，所以

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \supset \text{Closure}\{ \bigcup_{\sigma \in \Sigma_M} \bigcup_{n \geqslant 0} W_\sigma^{-n}(\bigcup_{i=1}^{M} J(R_i)) \}.$$

再由定理 9.2 知，

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \subset \text{Closure}\{ \bigcup_{\sigma \in \Sigma_M} \bigcup_{n \geqslant 0} W_\sigma^{-n}(\bigcup_{i=1}^{M} J(R_i)) \}.$$

证毕.

定理 9.4 系统$\widetilde{\mathscr{R}}$的 Julia 集 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是非空完全集.

证明 由命题 9.3 知，$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \supset J(R_i)$，故 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是非空的. 以下仅需证明 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是完全集. 如若不然，假设 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$不是完全集，则必存在

$\xi \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 及 ξ 的某个邻域 U，使得

$$U \cap J(\widetilde{\mathscr{R}}) = \{\xi\}.$$

由于 $\xi \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，因此存在 $\sigma_0 \in \Sigma_M$，使得 $\{W_{\sigma_0}^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 在 U 上不是正规的. 由 Montel 定理知

$$\bigcup_{n\geqslant 1} W_{\sigma_0}^n(U) \supset \hat{\mathscr{C}} \setminus \{\text{至多两个点}\},$$

而 $J(\widetilde{\mathscr{R}}) \subset \hat{\mathscr{C}}$，故有

$$\bigcup_{n\geqslant 1} W_{\sigma_0}^n(U) \supset J(\widetilde{\mathscr{R}}) \setminus \{\text{至多两个点}\}.$$

由命题 9.1 知，Fatou 集是前向不变的，而 $U \cap J(\widetilde{\mathscr{R}}) = \{\xi\}$，所以 $\bigcup_{n\geqslant 1} W_{\sigma_0}^n(U)$ 中仅有至多可数多个点是属于 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 的，故 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 也只能是至多可数多个点. 但是 $J(\widetilde{\mathscr{R}}) \supset J(R_i)$，而 $J(R_i)$ 是完全集，这是矛盾的. 这就说明 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 也必定是完全集. 证毕.

定理 9.5 设 $\widetilde{\mathscr{R}} = \{R_1, R_2, \cdots, R_M\}$，则

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) = \bigcup_{i=1}^{M} R_i^{-1}(J(\widetilde{\mathscr{R}})).$$

证明 根据命题 9.1，$J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 是后向不变的，故有

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \supset \bigcup_{i=1}^{M} R_i^{-1}(J(\widetilde{\mathscr{R}})).$$

现假设存在 $\xi \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，但 $\xi \notin \bigcup_{i=1}^{M} R_i^{-1}(J(\widetilde{\mathscr{R}}))$，亦即对任何 $R_i \in \widetilde{\mathscr{R}}$，$i = 1, 2, \cdots, M$，$R_i(\xi) \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$，故存在 $R_i(\xi)$ 的邻域 V_i，使得对任何 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{W_\sigma^n(R_i(z)) | V_i\}_{n=0}^{\infty}$ 是正规族. 取 U_0 为 $\bigcap_{i=1}^{M} R_i^{-1}(V_i)$ 中包含 ξ 的连通分支，设 $\tau_i = (i, j_1, \cdots)$，则对任 $i \in \{1, 2, \cdots, M\}$，$\{W_{\tau_i}^n(z) | U_0\}_{n=0}^{\infty}$ 均是正规族.

由于当 i 取遍 $\{1, 2, \cdots, M\}$，以及 $(j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots)$ 取遍 Σ_M

时，τ_i 亦取遍 Σ_M，故对任何 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{W_\sigma^n(z)|U_0\}_{n=0}^{\infty}$是正规族，因而有 $\xi \in F(\widetilde{\mathscr{R}})$，这就得到矛盾，所以

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \subset \bigcup_{i=1}^{M} R_i^{-1}(J(\widetilde{\mathscr{R}})).$$

证毕.

定理 9.6 所有排斥周期点均属于 Julia 集.

证明 设 ξ 是排斥周期点，则存在 $\sigma = (j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots) \in \Sigma_M$，以及 $k > 0$，使得 $W_\sigma^k(\xi) = \xi$. 令

$$\varphi(x) = R_{j_k} \circ \cdots \circ R_{j_1}(x),$$

则 φ 仍为有理函数，且 ξ 是 $\varphi(x)$的排斥不动点，从而 ξ 属于 φ 的 Julia 集 $J(\varphi)$. 如果 $\xi \notin J(\widetilde{\mathscr{R}})$，则存在 ξ 的邻域 U，使得对任何 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{W_\sigma^n(z)|U\}_{n=0}^{\infty}$是正规族. 特别地，取

$$\tau = \overline{(j_1, j_2, \cdots, j_k)} = (j_1, j_2, \cdots, j_k, j_1, j_2, \cdots, j_k, j_1, \cdots),$$

则$\{W_\tau^n(z)|U\}_{n=0}^{\infty}$是正规的，所以 $\xi \in F(\varphi)$，这与 $\xi \in J(\varphi)$ 矛盾，从而 $\xi \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$. 证毕.

推论 9.1 如果 z 是斥性周期点，则

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) = \mathrm{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0} W_\sigma^{-n}(z)\} = \mathrm{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geqslant 0} W_{\sigma^{-1}(n)}(z)\}.$$

命题 9.4 若 $\widetilde{\mathscr{R}} = \{R_1, R_2, \cdots, R_M\}$，且 $M \geqslant 2$，则 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$可以包含内点，而且 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$不是整个复平面.

证明 由于 $M \geqslant 2$，故特别取 $\widetilde{\mathscr{R}} = \{R_1(z), R_2(z)\}$，其中

$$R_1(z) = 4z^2,\ R_2(z) = z^2,$$

则

$$J(R_1) = \left\{z \in \hat{\mathscr{C}} \,\middle|\, |z| = \frac{1}{4}\right\};\ J(R_2) = \{z \in \hat{\mathscr{C}} \mid |z| = 1\},$$

由命题 9.3 知，

$$J(\widetilde{\mathscr{R}}) \supset J(R_1) \cup J(R_2) = \left\{ z \in \hat{\mathscr{C}} \,\middle|\, |z| = \frac{1}{4} \right\} \cup \left\{ z \in \hat{\mathscr{C}} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}.$$

设 $z \in \hat{\mathscr{C}}$ 且 $\frac{1}{2} < |z| < 1$，U 为 z 的邻域，则 $R_1^n(U) \to \{\infty\}$，但 $R_2^n(U) \to \{0\}$，故存在序列 $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$，其中 $j_i \in \{1, 2\}$，$i = 1, 2, \cdots, k$，使得

$$R_{j_k} \circ R_{j_{k-1}} \circ \cdots \circ R_{j_1}(U) \cap \{z \in \hat{\mathscr{C}} \mid |z| = 1\} \neq \varnothing.$$

由于 U 可以任意取，因此 z 是 $\{z \in \hat{\mathscr{C}} \mid |z| = 1\}$ 的逆像的凝聚点. 又由于 $\{z \in \hat{\mathscr{C}} \mid |z| = 1\} \subset J(\widetilde{\mathscr{R}})$，且 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是后向不变的闭集，所以 $z \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$，因此得 $J(\widetilde{\mathscr{R}}) \supset \left\{ z \in \overline{\mathscr{C}} \,\middle|\, \frac{1}{4} < |z| < 1 \right\}$，即 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$包含有内点. 因为 0 和$\infty$均为 R_1 和 R_2 的超吸性不动点，所以 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$不可能为全平面(图 9.4). 证毕.



图 9.4 $\widetilde{\mathscr{R}} = \{z^2, 4z^2\}$ 的 Julia 集，

$J(\widetilde{\mathscr{R}}) = \left\{ z \,\middle|\, \frac{1}{4} \leqslant |z| \leqslant 1 \right\}$ 包含内点

定理 9.7 Julia 集包含在周期点集的闭包内.

证明 记

$$K = J(\tilde{\mathscr{R}}) \backslash \{\infty,\ R_i^2 \text{ 的临界点和极点},\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ M\},$$

则 $J(\tilde{\mathscr{R}}) = \overline{K}$. 设 $\xi \in K$，但 ξ 不在周期点集的闭包内，则存在 ξ 的邻域 U，U 中无任何 W_σ^n 的周期点，其中 σ 是 Σ_M 中的任何元素. 设 φ_1，φ_2，φ_3 是 $R_i^2(z)$的三个互不相同的逆分支，对任意 $\sigma \in \Sigma_M$，定义

$$g_\sigma^n(z) = \frac{W_\sigma^n(z) - \varphi_1(z)}{W_\sigma^n(z) - \varphi_2(z)} \cdot \frac{\varphi_3(z) - \varphi_2(z)}{\varphi_3(z) - \varphi_1(z)},$$

则有

$$W_\sigma^n(z) = \varphi_2(z) + Q(z)\frac{\varphi_2(z) - \varphi_1(z)}{g_\sigma^n(z) - Q(z)},$$

其中

$$Q(z) = \frac{\varphi_3(z) - \varphi_2(z)}{\varphi_3(z) - \varphi_1(z)}.$$

显然下列两函数族的正规性一致：

$$\{W_\sigma^n(z)\,|U\}_{n=0}^{\infty},\ \{g_\sigma^n(z)\,|U\}_{n=0}^{\infty}.$$

由于 $g_\sigma^n(z) \neq 0,\ 1,\ \infty$，所以对任 $\sigma \in \Sigma_M$，$\{g_\sigma^n(z)\,|U\}_{n=0}^{\infty}$为正规族，从而$\{W_\sigma^n(z)\,|U\}$正规，这是矛盾的，故 ξ 必在周期点的闭包内. 证毕.

为了介绍下一个定理，我们先叙述一个引理，通常称为 Ahlfors 五岛定理.

引理 9.1[Ha] 设 E_1，E_2，E_3，E_4，E_5 为五个有界单连通区域，且它们的边界均为逐段光滑的 Jordan 曲线，它们的闭包互不相交，设 $r > 0$ 为任一常数，则存在一个常数 c，它仅与 E_i 和 r 有关，对于 $U_r = \{z \mid |z| < r\}$ 上的任何亚纯函数 f，如果它满足

$$\frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} > c,$$

则存在区域 $D \subset U_r$ 及某个 E_k，使得 f 将$\overline{D}$一对一地映射到$\overline{E_k}$.

我们还需下述正规族理论中的结论,通常称为 Marty 定理.

引理 9.2[Ha] 设 $\mathscr{F}$ 是一族定义在 D 上的亚纯函数, $D \subset \hat{\mathscr{C}}$, 则 $\mathscr{F}$ 为 D 上正规族的充要条件为:对 $f \in \mathscr{F}$, $|f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$ 在 D 内任何紧子集上一致有界.

定理 9.8 Julia 集 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$是斥性周期点集的闭包.

证明 由定理 9.6 及 Julia 集的向后不变性,我们只需要证明:对任 $\xi \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$, ξ 的任一邻域 U_0 均包含有$\widetilde{\mathscr{R}}$的排斥周期点. 由于$J(\widetilde{\mathscr{R}})$是完全集,故必可找到五个不同点 $z_j \in J(\widetilde{\mathscr{R}}) \cap U_0$, $j=1, 2, 3, 4, 5$. 取 z_j 的邻域 $E_j=\{z \mid |z-z_j|<2r\} \subset U_0$, 使五个 E_j 互不相交. 由于 $E_j \in J(\widetilde{\mathscr{R}})$, 故对 E_j 的邻域 $B(z_j,r)=\{z \mid |z-z_j|<r\}$, 存在 τ_j, 使得 $\{W_{\tau_j}^n|B(z_j, r)\}_{n=0}^{\infty}$不是正规族. 由引理 9.2 知,对每个 j, $j=1, 2, 3, 4, 5$, 均存在 $z_j' \in B(z_j, r)$ 和整数 $m_j>0$, 使得

$$\frac{|(W_{\tau_j}^{m_j})'(z_j')|}{1+|W_{\tau_j}^{m_j}(z_j')|^2}>c,$$

其中 c 是引理 9.1 中的常数. 设 $g_j(t)=t+z_j'$, 它将圆盘 U_r 映为 $B(z_j', r)$,将 0 映为 z_j',则 $W_{\tau_j}^{m_j} \circ g_j(t)$在 U_r 上解析,且满足引理 9.1 中的条件,故对每个 j,均存在区域 $\widetilde{D}_j \subset U_r$, 使得 $W_{\tau_j}^{w_j} \circ g_j$ 将$\widetilde{D}_j$ 单叶到上地映到 E_1, E_2, E_3, E_4 或 E_5 中之一,且 $D_j=g_j(\widetilde{D}_j) \subset B(z_j', r)$. 由于 E_j 是互不相交的五个单连通区域,故仅有下列五种可能情况出现:

1) 对于某个 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 有

$$W_{\tau_i}^{m_i}(D_i)=E_i;$$

2) 存在两个不同的整数 i, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 使得

$$W_{\tau_i}^{m_i}(D_i)=E_j,\ W_{\tau_j}^{m_j}(D_j)=E_i;$$

3) 存在三个互不相同的整数 i, j, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 使得

$$W_{\tau_i}^{m_i}(D_i)=E_j,\ W_{\tau_j}^{m_j}(D_j)=E_k,\ W_{\tau_k}^{m_k}(D_k)=E_i;$$

4）存在四个互不相同的整数 $i,\ j,\ k,\ l\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，使得 $W^{m_i}_{\tau_i}(D_i)=E_j,\ W^{m_j}_{\tau_j}(D_j)=E_k,\ W^{m_k}_{\tau_k}(D_k)=E_l,\ W^{m_l}_{\tau_l}(D_l)=E_i$；

5）对于 1，2，3，4，5 的某个排列 $i,\ j,\ k,\ l,\ n$ 有

$$W^{m_i}_{\tau_i}(D_i)=E_j,\ W^{m_j}_{\tau_j}(D_j)=E_k,$$

$$W^{m_k}_{\tau_k}(D_k)=E_l,\ W^{m_k}_{\tau_l}(D_l)=E_n,\ W^{m_n}_{\tau_n}(D_n)=E_i.$$

对于 1)，显然 $\varphi(z)=\left(W^{m_i}_{\tau_i}\right)^{-1}(z):E_i\mapsto D_i$ 为共形压缩映射，从而 $\varphi(z)$ 在 E_i 中必有一个吸引不动点，亦即 E_i 包含 $W^{m_i}_{\tau_i}(z)$ 的一个排斥不动点.

对于 2)，由于 $W^{m_i}_{\tau_i}(z):D_i\mapsto E_j$ 是单叶的，令

$$\Omega=(W^{m_i}_{\tau_i})^{-1}(D_j),$$

则 $\Omega\subset D_i$，且

$$W^{m_j}_{\tau_j}\circ W^{m_i}_{\tau_i}:\Omega\mapsto E_i$$

是单叶的. 由 1)同理可知，E_i 包含有 $W^{m_j}_{\tau_j}\circ W^{m_i}_{\tau_i}(z)$ 的一个排斥不动点. 假设

$$\tau_i=(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{m_i},\ \cdots),$$

$$\tau_j=(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{m_j},\ \cdots),$$

记

$$\tau=(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{m_i},\ j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{m_j},\ \cdots)\in\Sigma_M,$$

则有

$$W^{m_i+m_j}_{\tau}(z)=W^{m_j}_{\tau_j}\circ W^{m_i}_{\tau_i}(z),$$

亦即 E_i 含有 $W^{m_i+m_j}_{\tau}(z)$ 的一个排斥不动点.

对于 3)，4)，5)，用同 2)一样的方法可证得存在某个 E_i，它含有某个 $W^{n}_{\tau}(z)$ 的排斥不动点.

由以上叙述可知 U_0 含有某个 $W^{n}_{\tau}(z)$ 的排斥周期点，因此，Julia 集 $J(\mathscr{R})$ 是排斥周期点集的闭包. 证毕.

§9.3 整函数与亚纯函数组的迭代

记 $\mathscr{F}=\{f_1, \cdots, f_M\}$，其中 $f_1, f_2, \cdots, f_M$ 是 M 个超越整函数或超越亚纯函数. Fatou 集(或 Julia 集)$F(\mathscr{F})$(或 $J(\mathscr{F})$)与有理函数组的 Fatou 集(或 Julia 集)有许多共同性质，比如，$F(\mathscr{F})$是前向不变的开集，$J(\mathscr{F})$是后向不变的闭集等等.

定理 9.9 如果 z 是一个非例外点，则

$$J(\mathscr{F}) = \mathrm{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geq 1} W_\sigma^{-n}(z) \text{ 的凝聚点}\}.$$

证明 由于 z 是非凝聚点，故存在 $f_{i_0}\in\mathscr{F}$，使得$\{f_{i_0}^{-1}(z)\}$包含无穷多个点. 设 $\xi\in J(\mathscr{F})$，则对 ξ 的任何邻域U，存在 $\sigma_0=(k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots)\in\Sigma_M$，使得$\{W_{\sigma_0}^n(z)|U\}_{n=0}^{\infty}$不是正规的，因而，下述两种情况之一必然成立：

1) $\{W_{\sigma_0}^n(z)\}$对任 $n\geq 1$ 均有定义，但$\bigcup_{n\geq 0}W_{\sigma_0}^n(U)$至多遗漏复平面上两个点；

2) $\{W_{\sigma_0}^n(z)\}$并非在 U 上均有定义.

显然，当 $\mathscr{F}$ 中仅含有超越整函数时 2)不能发生. 对于 1)，则有

$$\{\bigcup_{n\geq 0}W_{\sigma_0}^n(U)\}\cap\{f_{i_0}^{-1}(z)\}\neq\varnothing,$$

所以存在一点 $\xi\in U$ 以及 $n\geq 0$，使得

$$f_{i_0}(W_{\sigma_0}^n(\xi)) = z_0.$$

对于情形 2)，设 n_0 为一整数，使得 $W_{\sigma_0}^n$对任意 $n\leqslant n_0$ 有定义，但 $W_{\sigma_0}^{n_0+1}$在 U 上不是都有定义的，则必存在 p，使得 $W_{\sigma_0}^{n_0}(p)=\infty$. 由于 $W_{\sigma_0}^{n_0}$是解析的，$W_{\sigma_0}^{n_0}(U)$是∞的一个邻域，而 z 是一个非例外点，由 Picard 定理知，

$$U' = f_{j_{n_0}+1}(W_{\sigma_0}^{n_0}(U\setminus\{p\}))$$

至多遗漏复平面上两个点，从而，U'包含$\{F_{i_0}^{-1}(z)\}$中的点.

综上所述，无论是情形 1)还是情形 2)，U 中必含有某个$\{W_\sigma^{-n}(z)\}$中的点，其中 $\sigma \in \Sigma_M$，$n \geq 0$. 证毕.

命题 9.5 如果 $z \in J(\mathscr{F})$，且 z 为一个非例外点，则

$$J(\mathscr{F}) = \text{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geq 0} W_\sigma^{-n}(z)\}.$$

证明 由上一定理知

$$J(\mathscr{F}) \subset \text{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geq 0} W_\sigma^{-n}(z)\},$$

但由 Julia 集的向后不变性及 $z \in J(\mathscr{F})$ 知

$$J(\mathscr{F}) \supset \text{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geq 0} W_\sigma^{-n}(z)\}.$$

又由于 Julia 集为闭集，故命题 9.5 得证. 证毕.

命题 9.6 若 p 是某个 $f_{i_0} \in \mathscr{F}$ 的极点，且 p 不是 $\mathscr{F}$ 的例外点，则

$$J(\mathscr{F}) = \text{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geq 0} W_\sigma^{-n}(p)\}.$$

证明 由命题 9.5 知，只需证明如果 p 是某个 $f_{i_0} \in \mathscr{F}$ 的极点，则 $p \in J(\mathscr{F})$. 现设 p 是 $f_{i_0} \in \mathscr{F}$ 的极点，则 $f_{i_0} \circ f_{i_0}$在 p 的任何邻域 U 内不是处处有定义的，故对任何 $\sigma \in \Sigma_M$，满足 $\sigma = (i_0, i_0, \cdots)$，$\{W_\sigma^n|U\}_{n=0}^\infty$不是处处有定义的. 由定义知，$p \in J(\mathscr{F})$. 证毕.

命题 9.7 设 $J(f_i)$为 f_i 的 Julia 集，$\mathscr{F} = \{f_1, f_2, \cdots, f_M\}$，则

$$J(\mathscr{F}) \supset \bigcup_{i=1}^M J(f_i),$$

且

$$J(\mathscr{F}) = \text{Closure}\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n\geq 0} W_\sigma^{-n}(\bigcup_{i=1}^M J(f_i))\}.$$

定理 9.10 $J(\mathscr{F})$是非空完全集.

证明 如若不然，则存在 $\xi \in J(\mathscr{F})$，以及 ξ 的邻域 U，使得 $U \cap J(\mathscr{F}) = \{\xi\}$，由于 $\xi \in J(\mathscr{F})$，故存在 $\sigma_0 \in \Sigma_M$，满足：

1) $W_{\sigma_0}^n(z)$在 U 上对任意 $n \geq 1$ 均有定义，且$\bigcup_{n\geq 1} W_{\sigma_0}^n(U) \supset \hat{\mathscr{C}} \backslash \{$至多

两点}；

或者

2) 存在整数 n_0，使得对任意 $n \leqslant n_0$，$W^n_{\sigma_0}(z)$在U上均有定义，但存在 $p \in U$，使得 $W^{n_0}_{\sigma_0}(p) = \infty$.

对于情形 1)，有：

$$\bigcup_{n \geqslant 1} W^n_{\sigma_0}(U) \supset J(\mathscr{F}) \backslash \{\text{至多两点}\},$$

由于 Fatou 集是前向不变的，故 $\bigcup_{n \geqslant 1} W^n_{\sigma_0}(U)$中仅有可列多个点，这是因为$U \cap J(\mathscr{F}) = \{\xi\}$，从而 $J(\mathscr{F})$是可数集. 但是，$J(\mathscr{F}) \supset J(f_i)$，而 $J(f_i)$是完全集，矛盾.

对于情形 2)，有：

由于 $\infty \in J(\mathscr{F})$，而且$U \cap J(\mathscr{F}) = \{\xi\}$，以及 $J(\mathscr{F})$是后向不变的，故有 $p \in J(\mathscr{F})$. 但 $p \in U$，所以 $p = \xi$. 又 $W^{n_0}_{\sigma_0}(U)$是∞的一个邻域，由 Picard 定理知

$$f_{j_{n_0}}(W^{n_0}_{\sigma_0}(U \backslash \{p\})) \supset \hat{\mathscr{C}} \backslash \{\text{至多两点}\} \supset J(\mathscr{F}) \backslash \{\text{至多两点}\}.$$

而由假设，$U \cap J(\mathscr{F}) = \{\xi\}$，并且 Fatou 集是前向不变的，所以有

$$f_{j_{n_0}}(W^{n_0}_{\sigma_0}(U \backslash \{p\})) \subset F(\mathscr{F}).$$

这是矛盾的，因而 $J(\mathscr{F})$是完全集. 证毕.

类似于有理函数组的迭代，我们同样可以证明下述几个定理.

定理 9.11 $J(\mathscr{F}) = \bigcup_{i=1}^{M} f_i^{-1}(J(\mathscr{F}))$.

定理 9.12 排斥周期点属于 Julia 集.

定理 9.13 $J(\mathscr{F})$是排斥周期点的闭包.

在经典动力系统中，由于 Fatou 集是完全不变的，故可以研究各 Fatou 分支在迭代下的游荡性. 在函数组的迭代动力系统中，Fatou 集是向前不变的，我们同样可以在一定意义下称某一 Fatou 分支是游荡的. 以下给出游荡域的精确定义.

定义 9.5 设 D_0 是 Fatou 集 $F(\mathscr{F})$的一个连通分支，如果对任何 $\sigma \in \Sigma_M$ 以及任何整数 $m \geqslant 0$，$n \geqslant 0$，$m \neq n$，均有 $W^m_\sigma(D_0)$和$W^n_\sigma(D_0)$

属于 $F(\mathscr{F})$的不同的连通分支,则称 D_0 为系统 $\mathscr{F}$ 的一个游荡域.

定理 9.14[Qi] 设 $\mathscr{F}$ 中的元素 $f_1, \cdots, f_M$ 全为级小于$\frac{1}{2}$的超越整函数,则 $\mathscr{F}$ 的任一非游荡域有界.

注意 $f_0(z) = \cos\left(2\pi z + \frac{9\pi^2}{4}\right)^{1/2}$ 的级为 $1/2$, $z = 0$ 是 f_0 的一个吸引不动点. 对任一 $x > 0$, 易证 $f_0^n(x) \to 0 (n \to \infty)$,这说明 $F(f_0)$有一个无界的不变吸引域,从而说明定理 9.14 中关于函数级小于 1/2 的要求是不能降低的. 为了完成定理 9.14 的证明,我们需要几个引理. 对任意 $R > 0$, 用 $s_f(R)$表示满足 $m_f(r) = R$ 的 r 值的最小者,其中$m_f(r)$表示$|f|$在 $|z| = r$ 上的极小值;用 M_f^{-1} 表示 M_f 的反函数,其中$M_f(r)$表示$|f|$在 $|z| = r$ 上的极大值.

引理 9.3[Ba] 设 $f(z)$为级 $\rho < \frac{1}{2}$ 的整函数,则

1) 任取 $\delta > 0$, 存在 $R_\delta > 0$, 使得当 $R > R_\delta$ 时,有

$$M_f^{-1}(R) \leqslant s_f(R) \leqslant \{M_f^{-1}(R)\}^{L(\rho)+\delta},$$

其中 $L(\rho)$是一个仅与 ρ 有关的正的常数;

2) 存在 $R_0 > 0$, 使得当 $R > R_0$ 时,所有环

$$M_f^{-1}(R) \leqslant |z| < s_f(R+1)$$

均含有一个简单闭曲线 Γ: $|f(z)| = R$, 且原点在 Γ 内部;

3) 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $c > 1$, 使得当 R 充分大时,区间(R, R^c)内有一点$\widetilde{R}$满足:

$$m_f(\widetilde{R}) > \{M_f(\widetilde{R})\}^{\cos\pi\rho - \varepsilon}.$$

引理 9.4[Ba] 设 f 为整函数,则对于任意 $k > 1, \delta > 0$, 存在 $R_0 > 0$, 使得当 $R > R_0$ 时,有

$$M_f^{-1}(R^k) < \{M_f^{-1}(R)\}^{k+\delta}.$$

运用上述两个引理,我们可证明引理 9.5.

引理 9.5 设 $f_j(z)$是整函数,其级 $\rho_j < \frac{1}{2}(j = 1, 2, \cdots, m)$, 记

$$g_m(z) = f_m \circ f_{m-1} \circ \cdots \circ f_1(z),$$

则存在 $t > 1$, $r_0 > 0$, 使得当 $r \geqslant r_0$ 时,所有环

$$r \leqslant |z| < r^t$$

均含有简单闭曲线 $\Gamma: |g_m(z)| = M_{g_m}(r)$, 且原点在 Γ 内部.

证明 应用数学归纳法:

1) 如果 $m = 1$, 记 $M_{f_1}(r) = R$, 则 $M_{f_1}^{-1}(R) = r$, 由引理 9.3 的 2)可知,存在 $R > 0$, 当 $R > R_0$ 时,所有环

$$M_{f_1}^{-1}(R) \leqslant |z| < s_{f_1}(R + 1)$$

均含有简单闭曲线 $\Gamma: |f_1(z)| = R$, 且原点在 Γ 内部. 对于 $\delta = 1, k = 1$, 由引理 9.3 的 1)和引理 9.4 可知,当 R 充分大时有

$$s_{f_1}(R + 1) < r^{3(L(\rho_1)+1)}.$$

记

$$t = 3(L(\rho_1) + 1),$$

便导出引理 9.5 当 $m = 1$ 时成立.

2) 假设引理 9.5 当 $m = p$ 时成立,由引理 9.3 的 3)可知,对于

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\cos\pi\rho_{p+1},$$

以及充分大的 R,存在 $c > 1$, 使得在区间(R, R^c)内有一点$\widetilde{R}$满足:

$$m_{f_{p+1}}(\widetilde{R}) > \{M_{f_{p+1}}(\widetilde{R})\}^{\delta}. \tag{9.1}$$

又由引理 9.4 得,当 R 充分大时,有

$$\{M_{g_p}^{-1}(R)\}^{c+1} > M_{g_p}^{-1}(R^c),$$

故当 $r = M_{g_p}^{-1}(R)$ 充分大时,

$$M_{g_p}(r^{c+1}) > R^c, \tag{9.2}$$

我们又有 $\widetilde{R} \in (R, R^c)$. 由(9.1)式知，存在 $\widetilde{r} \in (r, r^{c+1})$，使得 $M_{g_p}(\widetilde{r}) = \widetilde{R}$. 由归纳假设，存在 $t^* > 0$，使得对充分大的 $\widetilde{r}$，环 $\widetilde{r} \leqslant |z| < \widetilde{r}^{t^*}$ 中包含一简单闭曲线 Γ^*，且原点在 Γ^* 内部，并有

$$|g_p(z)| = M_{g_p}(\widetilde{r}) = \widetilde{R},\ z \in \Gamma^*.$$

由(9.1)式和(9.2)式得

$$|g_{p+1}(z)| \geqslant \{M_{g_{p+1}}(r)\}^\varepsilon,\ z \in \Gamma^*. \tag{9.3}$$

记

$$R^* = M_{g_{p+1}}\left(r^{\frac{\varepsilon}{2}}\right),$$

由引理 9.4 我们得到

$$\{M_{g_{p+1}}(r)\}^\varepsilon > M_{g_{p+1}}\left(r^{\frac{\varepsilon}{2}}\right).$$

此式及(9.3)式意味着对于充分大的 r 及 $z \in \Gamma^*$ 有

$$|g_{p+1}(z)| \geqslant M_{g_{p+1}}\left(r^{\frac{\varepsilon}{2}}\right). \tag{9.4}$$

在(9.4)式中把 r 用 $r^{\frac{2}{\varepsilon}}$ 替换，我们导出存在 $t^* > 0$，使得当 r 充分大时，环：

$$r^{\frac{2}{\varepsilon}} \leqslant |z| < r^{\frac{2}{\varepsilon}(c+1)t^*}$$

内包含一个具有如前所述性质的闭曲线 Γ^*，且

$$|g_{p+1}(z)| \geqslant M_{g_{p+1}}(r),\ z \in \Gamma^*. \tag{9.5}$$

另一方面，对于 $|z| < r$，有

$$|g_{p+1}(z)| \leqslant M_{g_{p+1}}(r),$$

从而在映射 $W = g_{p+1}(z)$ 下，区域 $\{|W| < M_{g_{p+1}}(r)\}$ 的前像包含一个分支 G，G 的内部包含 $\{|z| < r\}$. 由(9.5)式可知，显然 G 在 Γ^* 的

内部，所以，在 $|z|=r$ 和 Γ^* 之间存在简单闭曲线 Γ，原点在 Γ 之内部，且

$$|g_{p+1}(z)| = M_{g_{p+1}}(r),\ z \in \Gamma.$$

记

$$t = \frac{2}{\varepsilon}(c+1)t^*,$$

显然 Γ 位于环 $r \leqslant |z| < rt$ 内，从而引理 9.5 当 $m = p+1$ 时仍成立. 证毕.

下面证明定理 9.14.

证明 假如 D_0 是 $F(\mathscr{F})$ 的一个无界非游荡分支，则存在 $\sigma \in \Sigma_M$ 以及两个整数 $m(\geqslant 0)$，$n(\geqslant 0)$，$m<n$，使得 $W_\sigma^m(D_0)$ 和 $W_\sigma^n(D_0)$ 属于 $F(\mathscr{F})$ 的同一分支 D. 注意

$$W_\sigma^n(z) = f_{j_n} \circ f_{j_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{j_{m+1}} \circ W_\sigma^m(z),$$

这里记 $\sigma = (j_1, j_2, \cdots, j_m, \cdots, j_n, \cdots)$，记

$$F(z) = f_{j_n} \circ f_{j_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{j_{m+1}}(z),$$

则

$$W_\sigma^n(z) = F \circ W_\sigma^m(z),$$

从而 $W = F(z)$ 把 $W_\sigma^m(D_0)(\subset D)$ 映射到 $W_\sigma^n(D_0)(\subset D)$ 中. 由 $F(\mathscr{F})$ 的向前不变性，我们有

$$F(D) \subset D. \tag{9.6}$$

由引理 9.5 得知，$W_\sigma^m(D_0)$ 无界，故 D 无界.

又由引理 9.5 及 $F(z)$ 的超越性可知，存在 $t>1$，$r_0>0$，使得当 $r \geqslant r_0$ 时，环 $r \leqslant |z| < r^t$ 均含有一简单闭曲线 Γ 绕原点，且

$$|F(z)| = M_F(r) > r^{t^2},\ z \in \Gamma. \tag{9.7}$$

记 $z_1 = F(z_0) \in D$，设 γ_1 为 D 内连接 z_0 和 z_1 的弧，则

$$\gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n(\gamma_1)$$

为 D 内的曲线.

因为 $|z_0| < r_0^t$, $|z_1| = |F(z_0)| > r_0^{t^2}$, 所以由(9.7)式,存在一点 $z_1' \in \gamma_1$, 使得 $F(z_1') > r_0^{t^3}$. 由 $F(z_1') \in \gamma$ 我们知道 γ 包含圆周 $|z| = r_0^{t^3}$ 之外的某些点. 一般地,如果我们已知 γ 包含某圆周 $|z| = r_0^{t^n}$ 之外的某些点,用同样的方法我们可证明 γ 一定包含圆周 $|z| = r_0^{t^{n+1}}$ 之外的某些点. 此即说明 γ 通向∞.

任取 $z \in \gamma$, 存在 $n \in \mathscr{N}$ 及 $z' \in \gamma_1$, 使得 $F^n(z') = z$. 记 D 上的双曲距离为 ρ_D,则

$$\begin{aligned}\rho_D(z, F(z)) &= \rho_D(F^n(z'), F^{n+1}(z')) \\ &\leqslant \rho_D(z', F(z')) \\ &= A = \sup_{z' \in \gamma_1} \rho_D(F(z'), z').\end{aligned}$$

不失一般性,无妨设 $0, 1 \notin D$, 记 $E = \mathscr{C} \backslash \{0, 1\}$, E 上的双曲距离为 ρ_E,因为 $E \supset D$, 所以由 Schwartz-Pick 定理有

$$\rho_E(z, F(z)) \leqslant \rho_D(z, F(z)) \leqslant A.$$

由于在 E 上,双曲度量 $\sim c|\mathrm{d}z|/|z|\log|z|(z \to \infty)$, 这里 c 为某一正的常数,因此说明

$$|F(z)| = O(|z|^k), \ z \in \Gamma, \qquad (9.8)$$

其中 k 为某一正常.

由引理 9.5 还知道,存在一串点$\{z_n'\}$在 γ 上,使得

$$|F(z_n')| = M_F(|z_n'|),$$

从此及 $F(z)$的超越性知,

$$|F(z_n')|/|z_n'|^k \to \infty \quad (n \to \infty).$$

这与(9.8)式矛盾,从而定理 9.14 得证. 证毕.

§ 9.4　关于 Julia 集的内点[GR1]

如命题 9.4 所述,随机迭代动力系统的 Julia 集可以包含内点而又不是全平面,这是随机迭代动力系统与经典动力系统的一个本质差别.本节我们将讨论随机迭代动力系统的 Julia 集有内点但非全平面的充分条件以及 Julia 集没有内点的充分条件.

§ 9.4.1　Julia 集有内点的充分性条件

定理 9.15　设 $\mathscr{F}=\{f_1, f_2\}$, f_1, f_2 都是亚纯函数,并且有一个公共的吸性(超吸性)不动点,如果 f_1 有一个超吸性周期点 p_1 满足 $p_1\in\Gamma\subset J(f_2)$, 这里 Γ 是 Jordan 弧,则 $J(\mathscr{F})$有内点,但 $J(\mathscr{F})\neq\hat{\mathscr{C}}$.

证明　显然,f_1 和 f_2 的公共吸性(超吸性)不动点是稳定点,因此 $J(\mathscr{F})\neq\hat{\mathscr{C}}$. 另一方面,不妨设原点 O 是 f_1 的超吸性不动点,并且 $O\in\Gamma\subset J(f_2)$, 从而 $f_1(0)=f_1'(0)=0$, 因此存在原点的邻域 U 和共形映射 $\phi: D=\{|z|<1\}\to U$, 使得 $\phi(0)=0$, 而且对于 $z\in D$, 有$\phi^{-1}\circ f_1\circ\phi(z)=az^m(m\geqslant 2)$. 易知,存在"切割"扇形 $S=\{z: r_1<|z|<r_2,\ \theta_1<\arg z<\theta_2\}\subset D$, 满足 $\phi(S)\subset F(\mathscr{F})$. 如果 n 充分大,那么 $f_1^n(\phi(S))$是一个二连区域,其余分支含有原点.显然,当 n 趋向无穷时,$\mathrm{dist}(f_1^n(\phi(S)), 0)$ 趋向于 0, 因此对于充分大的 n, 我们有 $f_1^n(\phi(S))\cap J(f_2)\supset f_1^n(\phi(S))\cap\Gamma\neq\varnothing$, 这与 $f_1^n(\phi(S))\subset F(\mathscr{F})$ 矛盾,因为随机迭代动力系统的 Fatou 集是向前不变的.证毕.

推论 9.2　设 $\mathscr{F}=\{f_1, f_2, \cdots, f_M\}$, $f_1, f_2, \cdots, f_M$ 都是亚纯函数,并且有公共的吸性(超吸性)不动点,如果某个函数 f_i 有超吸性周期点 p_i, 满足 $p_i\in\Gamma\subset J(f_j)(j\neq i)$, 这里 Γ 是 Jordan 弧,则 $J(\mathscr{F})$有内点,但 $J(\mathscr{F})\neq\hat{\mathscr{C}}$.

证明　注意到 $f_1, f_2, \cdots, f_M$ 的公共吸性(超吸性)不动点是稳定点,因此 $F(\mathscr{F})\neq\varnothing$. 另一方面,$J(\mathscr{F})\supset J(f_i, f_j)$, 由上述定理可知

$J(\mathscr{F})$含有内点. 证毕.

由定理 9.15 的证明还可得到如下结果.

推论 9.3 设 $\mathscr{F}=\{f_1, f_2\}$, f_1, f_2 都是亚纯函数,并有公共的吸性(超吸性)不动点,又假设 $J(f_2)$连通(或局部连通). 如果 f_1 有超吸性周期点 p_1 满足 $p_1 \in J(f_2)$, 则 $J(\mathscr{F})$有内点,但 $J(\mathscr{F}) \neq \hat{\mathscr{C}}$.

推论 9.4 设 $\mathscr{P}=\{f_1, f_2\}$, f_1, f_2 都是多项式,如果 f_1 有超吸性周期点 $p_1 \in \Gamma \subset J(f_2)$, 这里 Γ 是 Jordan 弧,则 $J(\mathscr{P})$有内点,但 $J(\mathscr{P}) \neq \hat{\mathscr{C}}$.

以下命题是对两个函数 az^2 和 bz^2 所生成的随机迭代动力系统的 Julia 集的刻画.

命题 9.8 设 $\mathscr{P}=\{az^2, bz^2\}$, 若 $|a|<|b|(ab \neq 0)$, 则

$$J(\mathscr{P})=\left\{\frac{1}{|b|} \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{|a|}\right\}.$$

证明 首先我们证明

$$J(z^2, \lambda z^2)=\left\{\frac{1}{|\lambda|} \leqslant |z| \leqslant 1\right\}, \tag{9.9}$$

这里 $|\lambda|>1$. 由 Montel 定理易见

$$\left\{|z|<\frac{1}{|\lambda|}\right\} \subset F(z^2, \lambda z^2), \ \{|z|>1\} \subset F(z^2, \lambda z^2). \tag{9.10}$$

另一方面,所有圆周

$$\left\{z: |z|=\left|\frac{1}{\lambda}\right| \frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_k}}, \ 1 \leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k\right\}$$

是 $\{|z|=1\} \subset J(z^2, \lambda z^2)$ 的某个 W_σ^n 的逆像($\sigma \in \Sigma_2, n \in \mathscr{N}$),因此由命题 9.3 知这些圆周包含在 $J(z^2, \lambda z^2)$中. 我们注意到[0, 1]中任何实数可以表示为无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{z^k}(t_k=0, 1)$, 就是说,

$$\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n_k}}\ (1\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k)$$

可以逼近[0, 1]中任何实数. 由于 Julia 集是闭集,因此由(9.10)式可得(9.9)式.

对于一般情形,我们利用 $J(f_1, f_2)=\gamma^{-1}(J(\gamma\circ f_1\circ\gamma^{-1}, \gamma\circ f_2\circ\gamma^{-1}))$, 这里 $\gamma(z)=az$. 由(9.9)式,有

$$J(\mathscr{P})=\gamma^{-1}\left(J\left(z^2, \frac{bz^2}{a}\right)\right)=\gamma^{-1}\left(\left\{\left|\frac{a}{b}\right|\leqslant|z|\leqslant 1\right\}\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{|b|}\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{|a|}\right\}.$$

此即所证. 证毕.

注 若 $|a|=|b|$, 则 $J(\mathscr{P})=J(az^2)=\left\{|z|=\frac{1}{|a|}\right\}$.

类似的证明不难得到命题 9.9.

命题 9.9 如果 $|b|>1$, $n\geqslant 2$, 则

$$J(z^n, bz^n, \cdots, b^{n-1}z^n)=\left\{\frac{1}{|b|}\leqslant|z|\leqslant 1\right\};$$

若 $|b|<1$, 则

$$J(z^n, bz^n, \cdots, b^{n-1}z^n)=\left\{1\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{|b|}\right\}.$$

§9.4.2 Julia 集没有内点的充分性条件

定理 9.16 设 $\mathscr{R}=\{R_1, R_2\}$, $R_1=\frac{Q_1}{P_1}$, $R_2=\frac{Q_2}{P_2}$ 都是有理函数, 并且 $\deg Q_i-\deg P_i\geqslant 2(i=1, 2)$, 又设 $\deg R_1=n+2\geqslant 2$, $\deg R_2=m+2\geqslant 2$, 如果 $\operatorname{dist}(J(f_1), J(f_2))\geqslant c(n)D(f_1)+c(m)D(f_2)$, 则 $J(R)$ 没有内点. 此处 $c(n)=\dfrac{n+1}{\ln\left(1+\frac{1}{16n+28}\right)}$, $D(f_1)$和$D(f_2)$分别是$J(f_1)$和$J(f_2)$的直径.

为证明此定理,我们需要如下一些引理.

引理 9.6 设 $\widetilde{\mathscr{R}}=\{R_1, R_2, \cdots, R_M\}$, $R_1, \cdots, R_M$ 都是有理函数,如果存在区域 Ω,使得 $\Omega\cap F(\widetilde{\mathscr{R}})\neq\varnothing$,并且 $R_i^{-1}(\Omega\cap F(\widetilde{\mathscr{R}}))\subset\Omega\cap F(\widetilde{\mathscr{R}})$ 对 $i=1, 2, \cdots, M$ 成立,则 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 没有内点.

证明 设 $z\in J(\widetilde{\mathscr{R}})$,取 $z_0\in\Omega\cap F(\widetilde{\mathscr{R}})$, $z_0\notin E(\widetilde{\mathscr{R}})$,这里 $E(\widetilde{\mathscr{R}})$ 是 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 的例外点集,假定 U 是 z 的任一邻域,则由定理 9.2 知,必存在 $\sigma\in\Sigma_2$ 和 $n\in\mathscr{N}$ 满足 $U\cap\{\bigcup_{n\geqslant 0}W_\sigma^{-n}(z_0)\}\neq\varnothing$,由数学归纳法易证 $W_\sigma^{-n}(z_0)\subset F(\widetilde{\mathscr{R}})$,从而 U 含有稳定点. 由 U 的任意性知,z 不是 $J(\widetilde{\mathscr{R}})$ 的内点. 证毕.

引理 9.7 设 $f=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0(a_n\neq 0)$,用 $D(f)$ 表示 $J(f)$ 的直径(以下同),则存在仅依赖于 n 的常数 $c(n)$,使得对 f 的任何不动点 Q,当 $|z-Q|\geqslant c(n)D(f)$ 时,总有 $|f(z)-Q|\geqslant 4|z-Q|$. 实际上,我们可取 $c(n)=\dfrac{n-1}{\ln(4/3)}$.

证明 设 Q 是 f 的任一不动点,令 $\gamma(z)=z-Q$,则原点是 $\gamma\circ f\circ\gamma^{-1-1}$ 的不动点,因此,不失一般性我们可假设 $Q=0$. 在此假设下,有

$$f(z)=z(a_nz^{n-1}+a_{n-1}z^{n-2}+\cdots+a_1).$$

考察方程

$$a_nz^{n-1}+a_{n-1}z^{n-2}+\cdots+a_1=0.$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 是上述方程的根,则

$$\frac{a_i}{a_n}=(-1)^{n-i}\sum_{j_r\neq j_s(r\neq s)}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{n-i}},\ i=1, 2, \cdots, n-1.$$

令 $D=D(f)$,则

$$\left|\frac{a_i}{a_n}\right|\leqslant\binom{n-i}{n-1}D^{n-1},\quad i=1, 2, \cdots, n-1.$$

由此我们得到

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= |a_n z^n| \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} \right| \\
&\geqslant |a_n z^n| \left[2 - \left(1 + \frac{D}{|z|} \right)^{n-1} \right] \\
&= |z| |a_n| \cdot D^{n-1} \cdot \left| \frac{z}{D} \right|^{n-1} \left[2 - \left(1 + \frac{D}{|z|} \right)^{n-1} \right] \\
&= |z| m\left(\frac{D}{|z|} \right),
\end{aligned}
$$

此处 $m(x) = \frac{|a_n| D^{n-1}[2 - (1 + x)^{n-1}]}{x^{n-1}}$.

我们要证明:当 $x > 0$ 充分小时,$m(x) \geqslant 4$. 为此,令 $x = \frac{y}{n-1}$,则 $(1 + x)^{n-1} < \mathrm{e}^y$,因此,我们只需证明

$$
|a_n| D^{n-1} \frac{2 - \mathrm{e}^y}{\left(\frac{y}{n-1} \right)^{n-1}} \geqslant 4.
$$

上式成立的一个充要条件是

$$
\begin{cases}
y \leqslant \ln(4/3), \\
y \leqslant \sqrt[n-1]{\frac{1}{6}} \sqrt[n-1]{|a_n|} (n-1) D.
\end{cases}
\tag{9.11}
$$

由下面的引理 9.8 知 $\sqrt[n-1]{|a_n|} D \geqslant 4$,从而我们断言 $y \leqslant \ln(4/3)$ 导致 (9.11)式中另一不等式,进而导致 $m(x) \geqslant 4$. 就是说,如果

$$
x = \frac{D}{|z|} = \frac{y}{n-1} \leqslant \frac{\ln(4/3)}{n-1},
$$

则 $|f(z)| \geqslant 4|z|$. 取 $c(n) = \frac{n-1}{\ln(4/3)}$,则显然当 $|z| \geqslant c(n) D(f)$ 时,有 $|f(z)| \geqslant 4|z|$. 这就是我们需要证明的. 证毕.

引理 9.8 设 $f = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 (a_n \neq 0)$,则

$$D(f) \geqslant \frac{2}{\sqrt[n-1]{|a_n|}}.$$

证明 取 $a = \sqrt[n-1]{a_n}$，令 $\gamma(z) = az$，则 $\gamma \circ f \circ \gamma^{-1}$是首一多项式，并且显然 $J(f) = \gamma^{-1}(J(\gamma \circ f \circ \gamma^{-1}))$. 因为首一多项式的 Julia 集的直径大于或等于 2[Yi]，从而有 $D(f) \geqslant \frac{2}{|a|} = \frac{2}{\sqrt[n-1]{|a_n|}}$. 证毕.

引理 9.9 设 $f = \frac{z^{n+2} + a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_k z^k + \cdots + b_1 z + b_0} = \frac{Q(z)}{P(z)}$，此处 $b_k \neq 0$，$0 \leqslant k \leqslant n$，则存在仅依赖于 n 的常数 $c(n)$，使得对 f 的任何不动点 Q，当 $|z - Q| \geqslant c(n)D(f)$ 时，必有 $|f(z) - Q| \geqslant 4|z - Q|$. 实际上我们可取 $c(n) = \frac{n+1}{\ln\left(1 + \frac{1}{16n+28}\right)}$.

证明 我们可以假设 $P(z)$不是常数，因为这种情形已在引理 9.7 中证明. 令 $\gamma(z) = z - Q$，则 $\gamma \circ f \circ \gamma^{-1} = Q_1/P_1$ 仍是有理函数，且 $\deg(\gamma \circ f \circ \gamma^{-1}) = n + 2$，$\deg Q_1 - \deg P_1 \geqslant 2$，因此不妨设 $Q = 0$，否则用 $\gamma \circ f \circ \gamma^{-1}$代替 f 进行讨论. 设 $K(f)$是 f 的填充 Julia 集，即为向前轨道有界的点的全体. 由假设

$$f(z) = \frac{z(z^{n+1} + a_{n+1}z^n + \cdots + a_1)}{b_k z^k + \cdots + b_1 z + b_0},$$

考察方程

$$z^{n+1} + a_{n+1}z^n + \cdots + a_1 = 0,$$

由引理 9.7 的证明可得 $(D = D(f))$

$$\begin{aligned} |Q(z)| &= |z^{n+2} + a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_1| \\ &\geqslant |z|^{n+2}\left[2 - \left(1 + \frac{D}{|z|}\right)^{n+1}\right]. \end{aligned} \qquad (9.12)$$

由假设可取 $\omega \in K(f)$，使得 $|\omega| \geqslant \frac{D}{2}$，考察方程

$$\frac{z^{n+2}+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_1z}{b_kz^k+\cdots+b_1z+b_0}=\omega,$$

即

$$z^{n+2}+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+(a_k-\omega b_k)z^k+\cdots+(a_1-\omega b_1)z-\omega b_0=0,$$

易知 $|b_0\omega|\leqslant D^{n+2}$，从而 $|b_0|\leqslant 2D^{n+1}$. 一般地有

$$|a_i-\omega b_i|\leqslant\binom{n+2-i}{n+2}D^{n+2-i},\quad i=1,2,\cdots,k,$$

因此

$$|b_i|\leqslant 2\left[\binom{n+2-i}{n+1}+\binom{n+2-i}{n+2}\right]D^{n+1-i},\quad i=1,2,\cdots,k.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
|P(z)|&=|b_kz^k+\cdots+b_1z+b_0|\\
&=|z|^k\left|b_k+\frac{b_{k-1}}{z}+\cdots+\frac{b_0}{z^k}\right|\\
&\leqslant 2|z|^k\left[\binom{n+1-(k-1)}{n+1}D^{n+1-k}+\binom{n+2-k}{n+2}D^{n+1-k}\right.\\
&\quad+\frac{\binom{n+1-(k-2)}{n+1}D^{n+1-(k-1)}+\binom{n+2-(k-1)}{n+2}D^{n+1-(k-1)}}{|z|}\\
&\quad\left.+\cdots+\frac{D^n+\binom{n+1}{n+2}D^n}{|z|^{k-1}}+\frac{D^{n+1}}{|z|^k}\right]\\
&=2|z|^k\frac{|z|^{n+2-k}}{D}\cdot\left\{\left[\binom{n+1-(k-1)}{n+1}\left(\frac{D}{|z|}\right)^{n+1-(k-1)}\right.\right.\\
&\quad\left.+\binom{n+1-(k-2)}{n+1}\left(\frac{D}{|z|}\right)^{n+1-(k-2)}+\cdots+\left(\frac{D}{|z|}\right)^{n+1}\right]\\
&\quad+\left[\binom{n+2-k}{n+2}\left(\frac{D}{|z|}\right)^{n+2-k}+\binom{n+2-(k-1)}{n+2}\left(\frac{D}{|z|}\right)^{n+2-(k-1)}\right.
\end{aligned}$$

$$+\cdots+\binom{n+1}{n+2}\left(\frac{D}{|z|}\right)^{n+1}+\left(\frac{D}{|z|}\right)^{n+2}\Big]\Big\}$$

$$\leqslant 2|z|^{n+1}\frac{|z|}{D}\left[\left(1+\frac{D}{|z|}\right)^{n+1}+\left(1+\frac{D}{|z|}\right)^{n+2}-(2n+3)\frac{D}{|z|}-2\right].$$

上式与(9.12)式结合可得

$$|f(z)|=\left|\frac{Q(z)}{P(z)}\right|$$

$$\geqslant |z|\cdot\frac{D}{|z|}\cdot\frac{2-\left(1+\frac{D}{|z|}\right)^{n+1}}{2\left[\left(1+\frac{D}{|z|}\right)^{n+1}+\left(1+\frac{D}{|z|}\right)^{n+2}-(2n+3)\frac{D}{|z|}-2\right]}$$

$$=|z|\rho\left(\frac{D}{|z|}\right),$$

此处 $\rho(x)=\dfrac{x[2-(1+x)^{n+1}]}{2[(1+x)^{n+1}+(1+x)^{n+2}-(2n+3)x-2]}$.

剩下的是要证明当 $x>0$ 充分小时，$\rho(x)\geqslant 4$，即

$$\theta(x)=2x-x(1+x)^{n+1}-8(1+x)^{n+1}$$
$$-8(1+x)^{n+2}+8(2n+3)x+16\geqslant 0, \quad (9.13)$$

注意到 $\theta(0)=0$，为使上式对充分小的 x 成立，只要

$$\theta'(x)=2-(1+x)^{n+1}-(n+1)x(1+x)^n-8(n+1)(1+x)^n$$
$$-8(n+2)(1+x)^{n+1}+8(2n+3)>0.$$

利用数学分析的方法可证当 $x\leqslant\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{16n+28}\right)}{n+1}$ 时，有 $\theta'(x)>0$，从而(9.13)式成立，进而导致 $\rho(x)\geqslant 4$. 取 $c(n)=\dfrac{n+1}{\ln\left(1+\frac{1}{16n+28}\right)}$，则当 $|z|\geqslant c(n)D(f)$ 时，有 $|f(z)|\geqslant|z|\rho\left(\frac{D}{|z|}\right)\geqslant 4|z|$. 证毕.

下面证明定理 9.16.

证明 令

$$d=\operatorname{dist}(J(f_1),J(f_2)),$$

$$\Omega_1=\left\{z:\operatorname{dist}(z,K(f_1))\leqslant\frac{d}{2}\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{z:\operatorname{dist}(z,K(f_2))\leqslant\frac{d}{2}\right\},$$

此处 $K(f_i)$ $(i=1,2)$ 是 f_i 的填充 Julia 集. 首先我们证明

$$J(f_1,f_2)\subset\Omega_1\cup\Omega_2,\tag{9.14}$$

为此我们证明如下结论:

$$f_1^{-1}(\Omega_i)\subset\Omega_1,\ f_2^{-1}(\Omega_i)\subset\Omega_2,\quad i=1,2.\tag{9.15}$$

设 $z\in f_1^{-1}(\Omega_1)$, 但 $z\notin\Omega_1$, 我们将导出矛盾. 设 Q_1 是 f_1 的不动点,因为 $Q_1\in K(f_1)$, 所以我们有 $|z-Q_1|>d/2$, 由引理 9.9 得 $|f(z)-Q_1|\geqslant 4|z-Q_1|>2d$, 因此对任意 $P_1\in K(f_1)$, 有

$$|f_1(z)-P_1|\geqslant|f_1(z)-Q_1|-|Q_1-P_1|>\frac{3d}{2}.$$

这里我们用到了这样的事实: $c(n),c(m)>3$, 于是 $D(f_1)+D(f_2)<\frac{d}{2}$, 可见 $f_1(z)\notin\Omega_1$, 这与 $f_1(z)\in\Omega_1$ 矛盾,从而我们证明了 $f_1^{-1}(\Omega_1)\subset\Omega_1$.

另一方面,设 $z\in f_1^{-1}(\Omega_2)$, 要证 $z\in\Omega_1$. 若不然,我们有 $|f_1(z)-Q_1|>2d$. 设 $P_2\in K(f_2)$, 由假设, $|Q_1-P_2|<3d/2$, 因此

$$|f_1(z)-P_2|\geqslant|f_1(z)-Q_1|-|Q_1-P_2|>\frac{d}{2},$$

就是说 $f_1(z)\notin\Omega_2$, 这与 $z\in f_1^{-1}(\Omega_2)$ 矛盾,于是我们证明了 $f_1^{-1}(\Omega_2)\subset\Omega_1$. 用类似的方法可证 $f_2^{-1}(\Omega_i)\subset\Omega_2(i=1,2)$, 从而(9.15)式获证.

取 $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 中的点 ω_0 使得 ω_0 不是例外点. 由(9.15)式并利用数学归纳法可证明:对任意 $\sigma \in \Sigma_2$ 和 $n \in \mathscr{N}$ 有

$$W_\sigma^{-n}(\omega_0) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{9.16}$$

由(9.16)式和定理 9.2 我们就得到(9.14)式.

用 $\partial\Omega_i$ 表示 $\Omega_i (i = 1, 2)$ 的边界,由以上讨论可知

$$f_1(\partial\Omega_i), f_2(\partial\Omega_i) \subset \hat{\mathscr{C}} - (\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad i = 1, 2,$$

故由(9.14)式可以断言,$f_1(\partial\Omega_i)$, $f_2(\partial\Omega_i)$都含在 $F(\widetilde{\mathscr{R}})$ 中($i = 1, 2$). 由(9.15)式得

$$f_i^{-1}((\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap F(\widetilde{\mathscr{R}})) \subset (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap F(\widetilde{\mathscr{R}}), i = 1, 2. \tag{9.17}$$

(9.17)式和引理 9.3 直接导出了定理的结论. 证毕.

在定理 9.16 的证明中,用引理 9.7 代替引理 9.9 可得下述推论.

推论 9.5 设 $f_1 = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $f_2 = b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0$, 如果 $\mathrm{dist}(J(f_1), J(f_2)) \geqslant \frac{n-1}{\ln(4/3)} D(f_1) + \frac{m-1}{\ln(4/3)} D(f_2)$, 则 $J(f_1, f_2)$没有内点.

在命题 9.8 中看到,当 $|a| \neq |b| (ab \neq 0)$ 时,$J(az^2, bz^2)$有内点,且 $J(az^2, bz^2)$是一个圆环. 有趣的是,我们有如下结果.

命题 9.10 设 $|a| \neq |b| (ab \neq 0)$, $n \geqslant 3$, 则 $J(az^n, bz^n)$没有内点. 实际上,当 $|a| < |b|$ 时,有

$$J(az^n, bz^n) = \left\{ z : |z| = |a|^{-\frac{1}{n-1}} \left(\left| \frac{a}{b} \right| \right)^{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t_i}{n^t}}, t_i = 0, 1 \right\}. \tag{9.18}$$

证明 设 $\mathscr{P} = \{f_1, f_2\}$, $f_1 = az^n$, $f_2 = bz^n$, 不妨设 $a = 1$, $|b| > 1$, 因为利用命题 9.8 的证明中所用的规范法可将其他情形化为这种情形. 易见

$$D_1 = \left\{ |z| < \sqrt[n-1]{\left|\frac{1}{b}\right|} \right\} \subset F(\mathscr{P}),\ D_2 = \{ |z| > 1 \} \subset F(\mathscr{P}),$$

(9.19)

这是因为由归纳法可证明：对任意 $\sigma \in \Sigma_2$ 和 $n \in \mathscr{N}$，有

$$W_\sigma^n(D_1) \subset D_1,\ W_\sigma^n(D_2) \subset D_2.$$

容易证明：

$$D = \left\{ \sqrt[n]{\left|\frac{1}{b}\right|} < |z| < \sqrt[n]{\sqrt[n-1]{\left|\frac{1}{b}\right|}} \right\} \subset F(\mathscr{P}).$$

(9.20)

实际上，由(9.19)式不难看出

$$f_1(D) \subset D_1 \subset F(\mathscr{P}),\ F_2(D) \subset D_2 \subset F(\mathscr{P}).$$

令 $\Omega = \left\{ \sqrt[n-1]{\left|\frac{1}{b}\right|} < |z| < 1 \right\}$，我们以下证明：

$$f_i^{-1}(\Omega \cap F) \subset \Omega \cap F, \quad i = 1, 2. \qquad (9.21)$$

显然，$f_i^{-1}(\Omega) \subset \Omega (i = 1, 2)$. 设 $z \in \Omega \cap F(\mathscr{P})$，$\omega_1 \in f_1^{-1}(z)$，于是 $f_1(\omega_1) = \omega_1^n = z \in F(\mathscr{P})$，从而 $|f_2(W_1)| = |bW_1^n| = |bz| \geqslant |b| \sqrt[n-1]{\left|\frac{1}{b}\right|} > 1$. 由(9.19)式得 $f_2(\omega_1) \in F(\mathscr{P})$，从而 $\omega_1 \in F(\mathscr{P})$.

以上论述证明了 $f_1^{-1}(\Omega \cap F(\mathscr{P})) \subset \Omega \cap F(\mathscr{P})$. 同理可证 $f_2^{-1}(\Omega) \cap F(\mathscr{P})) \subset \Omega \cap F(\mathscr{P})$. 由引理 9.6 和(9.21)式知 $J(az^n, bz^n)$没有内点，因为由(9.20)式知 Ω 含有稳定点，利用命题 9.8 的证明中类似的方法可证明(9.18)式，此处不再赘述.

§9.5 无穷多个函数的随机迭代动力系统[GR2]

以上我们讨论了有穷多个函数的随机迭代动力学性质，特别是随

机迭代动力系统的 Julia 集的性质. 在本节中,受计算数学中广泛运用的超松弛法(SOR)的启发以及 Fornaess 和 Sibony 工作的影响[FS],我们讨论无穷多个函数的随机迭代动力系统. 超松弛法的基本思想是选择松弛因子 ω,使得 SOR 迭代

$$M_\omega x^{(k+1)} = N_\omega x^{(k)} + \omega b$$

在适当的初始值以较快的速度收敛,这里 M_ω 和 N_ω 均为 n 阶方阵,b 是 n 维向量,松弛因子 ω 依赖于 $x^{(k)}$. 我们把迭代过程写成

$$x^{(k+1)} = f_{\omega_k}(x^{(k)}),$$

其中 $f_{\omega_k}(x^{(k)}) = M_{\omega_k}^{-1}N_{\omega_k}x^{(k)} + M_{\omega_k}^{-1}\omega_k b$, 更精确的描述可见文献[GV]. 因此,从复动力系统的观点,我们的问题是对给定的松弛因子 ω 的集合 M 讨论函数族 $\{f_\omega | \omega \in M\}$ 的动力学性质. Fornaess 和 Sibony 研究了多项式函数族 $\mathscr{F} = \{f_c | c = (a_0, a_1, \cdots, a_{d-1}) \in \mathscr{C}^d\}$ 对于给定轨道 $\Lambda = (c_1, c_2, \cdots) \in l^\infty(\mathscr{N}, \mathscr{C}^d)$ 所形成的动力系统,其中 $f_c = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. 我们感兴趣的是函数族 $\mathscr{F} = \{f_c | c \in M \subset l^\infty(\mathscr{N}, \mathscr{C}^d)\}$ 对所有轨道 $\Sigma_M = \{\Lambda = (c_1, c_2, \cdots) | c_j \in M, j \in \mathscr{N}\}$ 的动力学性质.

设 $\mathscr{F} = \{f_i | i \in M\}$ 是亚纯函数集合,M 是任一指标集,就是说 $\mathscr{F}$ 中的函数或是有理函数,或是整函数,或是亚纯函数. 记

$$\Sigma_M = \{\sigma = (j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots) | j_i \in M, i \in \mathscr{N}\},$$

对任意 $\lambda \in \Sigma_M$, 类似于 § 9.1 中的方式,我们可以定义迭代序列 $\{W_\sigma^n(z)\}$ 以及 $\{W_\sigma^{-n}(z)\}$.

定义 9.6 称点 $z \in \hat{\mathscr{C}}$ 为函数族 $\mathscr{F}$ 的稳定点,如果存在 z 的邻域 U,使得对任意 $\sigma \in \Sigma_M$, $\{W_\sigma^n\}$ 在 U 上有定义并且正规. 稳定点的全体构成的集合称为 $\mathscr{F}$ 的 Fatou 集,记为 $F(\mathscr{F})$, $F(\mathscr{F})$ 在 $\hat{\mathscr{C}}$ 中的余集,称为 $\mathscr{F}$ 的 Julia 集,记为 $J(\mathscr{F})$.

类似于 § 9.2 中的方法,容易验证 Fatou 集是开集且向前不变,Julia 集是闭集且向后不变. 此外,易证 Julia 集是非空完全集.

由 Montel 定理，容易得到下述命题.

命题 9.11 设 $\mathscr{F}=\{f_i|i\in M\}$ 是亚纯函数集合，如果 $z\in J(\mathscr{F})$，U_z 是 z 的邻域，则

$$E_{U_z}=\overline{\mathscr{C}}\setminus\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_z)$$

最多含有两个点.

应当说明的是，当点 p 是 W_σ^n 的本性奇点时，我们自然规定 $W_\sigma^n\{p\}=\varnothing$.

定义 9.7 称 $E_z=\bigcup_{U_z}E_{U_z}$ 为 $z\in J(\mathscr{F})$ 的例外点集，其中取并时，U_z 遍历点 z 的所有邻域.

定义 9.8 称 $E(\mathscr{F})=\bigcup_{z\in J(\mathscr{F})}E_z$ 为 $\mathscr{F}$ 的例外点集.

显然，当 $\mathscr{F}$ 是由有理函数构成的有限集时，$E(\mathscr{F})=E_z$，这里 z 是 $J(\mathscr{F})$ 中的任意点；当 $\mathscr{F}$ 是由超越整函数和超越亚纯函数构成的集合时，不难证明 $z\in E(\mathscr{F})$ 当且仅当 z 是所有 f_i $(i\in M)$ 的 Picard 例外值.

命题 9.12 设 $\mathscr{F}$ 是亚纯函数集合，则 $E(\mathscr{F})$ 最多含有两个点.

证明 用反证法. 若 $E(\mathscr{F})$ 中多于两个点，设 $a,b,c\in E(\mathscr{F})$，且 a,b,c 互不相同，此时必有下列情形之一发生：

1) $E_{z_1}=\{a\}$，$E_{z_2}=\{b\}$，$E_{z_3}=\{c\}$，这里 $z_1,z_2,z_3\in J(\mathscr{F})$，且 $z_i\neq z_j(i\neq j)$；

2) $E_{z_1}=\{a,b\}$，$c\in E_{z_2}$，$z_1,z_2\in J(\mathscr{F})$，且 $z_1\neq z_2$.

在第一种情形下，由 $J(\mathscr{F})$ 的非空完全性，我们可以进一步要求 $z_1\neq\infty$，$z_2\neq a$，$z_3\neq a$. 由 $E_{z_1}=\{a\}$ 可知，存在 z_1 的邻域 U_{z_1} 使得 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_1})$ 不含 a. 此时，如果对任意 $\sigma\in\Sigma_M$，$\{W_\sigma^n\}$ 在 U_{z_1} 上有定义，则 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_1})$ 必定含有 z_2，z_3 中的一点，不妨设含有 z_2. 这样 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_1})$ 含有 z_2 的某个邻域 U_{z_2}，当然含有 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_2})$. 但由于 $E_{z_2}=\{b\}$，故 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_2})$ 最多漏掉一个点 b，因此含有 a. 以上论证说明 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_1})$ 包含 a，矛盾.

倘若对某个 $\sigma=(j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots)\in\Sigma_M$, $\{W_\sigma^n\}$ 在 U_{z_1} 上不总是有定义,则必存在 $n\in\mathscr{N}$, 使得 W_σ^n 是 U_{z_1} 上的亚纯函数,以某点 $p\in U_{z_1}$ 为极点,即 $W_\sigma^n(p)=\infty$, 并且 $f_{j_{n+1}}$ 是超越整函数或超越亚纯函数,从而 $W_\sigma^{n+1}(U_{z_1})$ 必定含有 z_2 或 z_3,这时由以上讨论导出矛盾.

在第二种情形,可进一步要求 $z_1\neq\infty$, $z_2\neq a, b$. 类似的方法可导出矛盾,从而命题得证. 证毕.

定理 9.17 设 $\mathscr{F}=\{f_i|i\in M\}$ 是有理函数集合,E_z 为关于 z 的例外点集,$z\in J(\mathscr{F})$.

1) 如果 E_z 仅含一个点,则存在 Möbius 变换 T,使得对任何 $i\in M$, $T\circ f_i\circ T^{-1}$ 都是多项式.

2) 如果 E_z 含有两个点,则存在 Möbius 变换 T,使得对任何 $i\in M$, $T\circ f_i\circ T^{-1}(z)=K_i z^{\pm d_i}$, 其中 d_i 为 f_i 的度,K_i 为常数. 如果 E_z 含有 f_i 的两个不动点,则符号取"+";如果 E_z 含有 f_i 的一个周期为 2 的周期轨道,则符号取"−".

我们知道,当 $\mathscr{F}$ 是由有理函数构成的有限集时,E_z 与 $z\in J(\mathscr{F})$ 的选取无关,且 $E_z\subset F(\mathscr{F})$. 当 $\mathscr{F}$ 是无限集时,有例子表明 E_z 依赖于 z 的选取,且 $E_z\subset F(\mathscr{F})$ 未必成立.

例 9.1 取 $f_n(z)=\dfrac{1}{n}z^2$, $\mathscr{F}=\{f_n|n\in\mathscr{N}\}$, 则容易验证(见命题 9.8):

$$F(\mathscr{F})=\{|z|<1\},\ J(\mathscr{F})=\{|z|\geqslant 1\}.$$

易知 $E_1=\{0, \infty\}$, $E_\infty=\{0\}$. 显然, $E_1\neq E_\infty$, $E_1\not\subset F(\mathscr{F})$.

尽管如此,我们还是有下面的结论.

定理 9.18 设 $\mathscr{F}$ 是有理函数集合,则 $E(\mathscr{F})\subset F(\mathscr{F})$ 当且仅当 E_z 不依赖于 $z\in J(\mathscr{F})$ 的选取.

证明 设 $E(\mathscr{F})\subset F(\mathscr{F})$, 我们要证明 $E_{z_1}=E_{z_2}$, 此外 $z_1, z_2\in J(\mathscr{F})$, $z_1\neq z_2$. 设 $a\in E_{z_1}$, 但 $a\notin E_{z_2}$, 则存在 z_1 的邻域 U_{z_1},使得 $\bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup\limits_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_1})$ 遗漏 a,从而遗漏 z_2,因若不然,则 $\bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup\limits_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_1})$ 含有 z_2 的某个邻域 U_2,从而含有 $\bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup\limits_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_2})$. 由 $a\notin E_{z_2}$, 易见 $\bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup\limits_{n>0}$

$W_\sigma^n(U_{z_2})$包含 a，从而$\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_{z_1})$包含 a，矛盾，因此 $z_2\in E_{z_1}'$. 由假设，$z_2\in F(\mathscr{F})$，这是不可能的，故$E_{z_1}\subset E_{z_2}$，同理$E_{z_2}\subset E_{z_1}$，故$E_{z_1}=E_{z_2}$.

另一方面，假设 E_z 与 $z\in J(\mathscr{F})$ 的选取无关，现证 $E(\mathscr{F})\subset F(\mathscr{F})$. 若不然，假设 $a\in E_z$，但 $a\notin F(\mathscr{F})$，由于 $a\in E_a=E_z$，故存在 a 的邻域U_a，使得$\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_a)$遗漏 a，但E_a中的点或是$f_i(i\in M)$的不动点，或是 f_i 的周期为 2 的周期点，即 $f_i(a)=a$，或 $f_i^2(a)=a$（见定理 9.1 的证明），这说明$\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^n(U_a)$含有 a，矛盾. 证毕.

将上述证明中的第一部分作适当变动，即可证明以下定理和推论.

定理 9.18′ 设 $\mathscr{F}$ 是亚纯函数集合，如果$E(\mathscr{F})\subset F(\mathscr{F})$，则$E_z$不依赖于 $z\in J(\mathscr{F})$ 的选取.

定理 9.19 设 $\mathscr{F}$ 是亚纯函数集合，如果 $z\in\hat{\mathscr{C}}\setminus E(\mathscr{F})$，则 $J(\mathscr{F})\subset\{[\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^{-n}(z)]$ 的凝聚点$\}$.

推论 9.6 设 $\mathscr{F}$ 是亚纯函数的集合，如果 $z\in J(\mathscr{F})$，且 $z\notin E(\mathscr{F})$，则

$$J(\mathscr{F}=\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^{-n}(z)\}\text{ 的闭包}.$$

值得注意的是，与有限函数组的情形不同，上述条件 $z\notin E(\mathscr{F})$ 是不能去掉的. 例如，取例 1 中的 $\mathscr{F}$，则 $\infty\in J(\mathscr{F})$，但是 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^{-n}(\infty)=\{\infty\}$，其闭包不等于 $J(\mathscr{F})$.

推论 9.7 设 $\mathscr{F}$ 是亚纯函数集合，用 $J(f_i)$表示 f_i 的经典 Julia 集，则

$$J(\mathscr{F})=\{\bigcup_{\sigma\in\Sigma_M}\bigcup_{n>0}W_\sigma^{-n}(\bigcup_{i\in M}J(f_i))\}\text{的闭包}.$$

上述定理与推论的证明与 § 9.2 中相应的证明类似.

我们知道，如果 $\mathscr{F}$ 是由有限个亚纯函数构成的集合，则有 $J(\mathscr{F})=\bigcup_{i\in M}f_i^{-1}(J(\mathscr{F}))$，但当 $\mathscr{F}$ 是无限集时，这一结论不再成立.

例 9.2 取 $f_n(z)=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)z^2$，$\mathscr{F}=\{f_n|n\in\mathscr{N},\ n\geqslant 2\}$，容

易验证：$J(\mathscr{F}) = \{1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$. 显然 $1 \in J(\mathscr{F})$，但 $1 \notin \bigcup_{n=2}^{\infty} f_n^{-1}(J(\mathscr{F}))$.

尽管如此，我们仍然有以下定理.

定理 9.20 设 $\mathscr{F}$ 是亚纯函数集合，则

1) $J(\mathscr{F}) \supset \bigcup_{i \in M} f_i^{-1}(J(\mathscr{F}))$；

2) 如果 $J(\mathscr{F}) = \bigcup_{j_1, \cdots, j_k \in M} J(f_{j_1}, \cdots, f_{j_k})$，则

$$J(\mathscr{F}) = \bigcup_{i \in M} f_i^{-1}(J(\mathscr{F})).$$

证明 只需证明定理的第二部分. 设 $J(\mathscr{F}) = \bigcup_{j_1, \cdots, j_k \in M} J(f_{j_1}, \cdots, f_{j_k})$，若 $z \in J(\mathscr{F})$，则存在 $j_1, \cdots, j_k \in M$，使得 $z \in J(f_{j_1}, \cdots, f_{j_k})$，由定理 9.5 知

$$z \in \bigcup_{t=1}^{k} f_i(J(f_{j_1}, \cdots, f_{j_k})) \subset \bigcup_{i \in M} f_i^{-1}(J(\mathscr{F})).$$

这说明 $J(\mathscr{F}) \subset \bigcup_{i \in M} f_i^{-1}(J(\mathscr{F}))$. 证毕.

最后我们不加证明地叙述下面两个定理，其证明类似于 § 9.2 中相应结论的证明.

定理 9.21 设 $\mathscr{F}$ 是亚纯函数集合，则 $\mathscr{F}$ 的排斥周期点属于 $J(\mathscr{F})$.

定理 9.22 设 $\mathscr{F}$ 是亚纯函数集合，则 $J(\mathscr{F})$ 是排斥周期点集的闭包.

参 考 文 献

[Ba] I. N. Baker, Zusamen setzungen ganzer fonktionen. *Math. Z.* 69 (1958), 121-163.

[FS] J. H. Fornaess and N. Sibony, Random iterations of rational functions. *Erg. Th. and Dyn. Sys.* 11 (1991), 687-708.

[GR1] Zhi-Min Gong and Fu-Yao Ren, On interior points of the

Julia set J(R) for the random dynamical system R. *Chinese Ann. Math.* 18 (4), Ser. B (1997), 503-512.

[GR2] Zhi-Min Gong and Fu-Yao Ren, A random dynamical system formed by infinite many functions. *J. Fudan Univ.* (*N.S.*). 35(4) (1996), 387-392.

[GV] G. H. Golub and C. F. Vanloan, *Matrix computations*. The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989.

[Ha] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*. Clarendon Press, Oxford, 1964.

[Qi] Jian-Yong Qiao, stable set of iteration of entire functions. *Acta Math. sinica*, 37 (5) (1994), 702-708.

[Yi] Yong-Cheng Yin, The relation between capacities and diameters of compact sets on C. *J. of Zhejiang Univ.* (*NS*), 28 (1994), 335-337.

[ZR1] Wei-Min Zhou and Fu-Yao Ren, The Julia sets of the random iteration of rational functions. *Chinese Sci. Bull.* 37 (12) (1992), 969-971.

[ZR2] Wei-Min Zhou and Fu-Yao Ren, *A dynamical system formed by a set of rational functions*, *Current Topics In Analytic Function Theory*. World Scientific Press, 1992, 437-449.

[ZR3] Wei-Min Zhou and Fu-Yao Ren, The Julia sets of the random iteration of transcedental functions. *Chinese Science Bull.* 38 (2) (1993), 249-250.

第十章　代数函数和代数体函数的迭代

在以上各章中，我们讨论了有理函数、超越整函数和超越亚纯函数的迭代动力系统，这些均是复平面上单值解析映射的迭代问题. 现在很自然要考虑多值解析映射的动力系统. 近年来分形几何的迅速发展是激发人们研究多值解析映射的动力系统的重要因素之一，把多值解析函数的各个单值分支进行随机迭代是生成大批分形的一种有效的统一的解析方法. 而代数函数和代数体函数是复平面上最基本、最重要的多值解析函数类，它是由 P. Poincaré 最初引入的，在复分析和微分方程理论中均有重要的研究价值. 事实上，Fatou 和 Julia 早就涉及了代数函数的迭代问题，他们在研究函数方程的可解性时用到了代数函数的迭代. 近年来，S. Bullet[Bu]，H. F. Munzner 和 H.-M. Rasch[MR]等人对代数函数的迭代动力系统作了较为深入的研究，而超越整代数体函数的迭代动力系统是新近才建立的[QR]. 本章首先介绍代数函数和代数体函数的基本概念，继而介绍代数函数和代数体函数动力系统.

§10.1　代数函数和代数体函数

为了给出代数函数和代数体函数的定义，我们首先引入下述定义.

定义 10.1　设 $F(z, w)$和 $G(z, w)$分别是次数为 $\deg F$ 和 $\deg G$ 的 w 的多项式，其系数是 z 的亚纯函数，如果存在系数为 z 的亚纯函数的 w 的多项式 $G_1(z, w)$，使得

$$F(z, w) = G(z, w)G_1(z, w),$$

则称 $G(z, w)$是 $F(z, w)$的因子. 如果 $F(z, w)$的因子只有其自身和 z 的亚纯函数，则称 $F(z, w)$是不可约的.

代数体函数是由不可约方程

$$\varphi(z,w) = A_\nu(z)w^\nu + A_{\nu-1}(z)w^{\nu-1} + \cdots + A_0(z) = 0 \tag{10.1}$$

确定的复平面$\mathscr{C}$上的ν值解析函数，其中$A_j(z)(j = 0, 1, \cdots, \nu)$是$z$的整函数，并且没有公共零点. 注意，当$\nu = 1$时，$w(z)$退化为亚纯函数. 当$A_j(z)(j = 0, 1, \cdots, \nu)$全为多项式时，称$w(z)$为代数函数；当$A_\nu(z)$没有零点时，称$w(z)$为整代数体函数，往往为方便计，我们假定整代数体函数由以下不可约方程定义：

$$\varphi(z,w) = w^\nu + A_{\nu-1}(z)w^{\nu-1} + \cdots + A_0(z) = 0, \tag{10.2}$$

其中$A_j(z)(j = 0, \cdots, \nu - 1)$如上定义. 特别地，如在(10.2)式中至少有一个$A_j(z)$是超越整函数，则称$w(z)$为超越整代数体函数.

任取一对有穷复数(z_0, w_0)，如果它满足不可约方程(10.1)，即

$$\varphi(z_0, w_0) = 0,$$

且假如进一步有

$$\varphi_w'(z_0, w_0) \neq 0,$$

则由隐函数定理，存在唯一的解析函数元素$(w(z), B_r(z_0))$属于(10.1)式，且$w(z_0) = w_0$，即任取$z \in B_r(z_0)$，有$\varphi(z, w(z)) \equiv 0$，这里$B_r(z_0) = \{|z - z_0| < r\}$是一个以$z_0$为圆心、以$r$为半径的某个小圆.

下列三种点称为临界点：

(i) $z = \infty$；

(ii) $A_\nu(z)$的零点；

(iii) 使$\varphi(z_0, w)$和$\varphi_w'(z_0, w)$有公共根的点z_0.

所有临界点的集合记为S_z，并记$T_z = \mathscr{C} \backslash S_z$. 我们有定理10.1.

定理 10.1 任取$z_0 \in T_z$，恰存在ν个判别的解析函数元素$(w_j(z), B_r(z_0))$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$属于方程(10.1).

证明 由于$z_0 \in T_z$，计及代数基本定理知，ν次方程

$$\varphi(z_0,w) = A_\nu(z_0)w^\nu + A_{\nu-1}(z_0)w^{\nu-1} + \cdots + A_0(z_0) = 0$$

恰有 ν 个根，而由条件(iii)知，这 ν 个根相互判别. 这样得到 ν 个点对 (z_0, w_j^0) $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$，其中 w_j^0 $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$ 为上述方程的根. 由以上讨论知，存在 ν 个解析函数元素 $(w_j(z), B_r(z_0))$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$ 属于方程(10.1)，并且 $w_j(z_0) = w_j^0$. 证毕.

把方程(10.1)的所有解析函数元素的集合记为 $\dot{A} = \{(w(z), B_r(a)), a \in T_z\}$，易见 $\dot{A}$ 中任一元素可在 T_z 上任意解析开拓，所得的解析函数元素仍在 $\dot{A}$ 中，且 $\dot{A}$ 中任两个元素可互相解析开拓.

下面介绍在临界点处的函数元素.

任取满足 $\varphi(z_0,w_0) = 0$, $\varphi'_w(z_0,w_0) = 0$ 且 $A_\nu(z_0) \neq 0$ 的点对 (z_0, w_0)，取 T_z 内 z_0 的穿孔小圆盘 $B_0(z_0) = B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$，并取 $B_r(z_0)$ 的一直径，它由两半径 α_1 和 α_2 构成，把 $B_r(z_0)$ 分为两个半圆 $U_{z_0}^1$ 和 $U_{z_0}^2$. 由定理 10.1 得，在 $U_{z_0}^1$ 上每一点 z 处恰有 ν 个判别的解析函数元素 $\{w_j^1(z)\}$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$；同样，在 $U_{z_0}^2$ 上每一点 z 处也恰有 ν 个判别的解析函数元素 $\{w_j^2(z)\}$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$. 它们均从属于方程(10.1)，即均为 $\dot{A}$ 中元素. 现在取 $w_1^1(z)$，并沿某一途径将其解析开拓，如果这一途径穿过 α_1，则所得 $U_{z_0}^2$ 上的解析函数元素必与 $w_j^2(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$ 中之一相等，不妨设 $w_1^1(z)$ 沿一途径第一次穿越 α_1 解析开拓得到元素 $w_1^2(z)$. 适当选好序号，可设 $w_j^1(z)$ 通过这种解析开拓得到元素 $w_j^2(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$. 再把 $w_1^2(z)$ 沿一途径穿越 α_2 回到 $U_{z_0}^1$ 上的起始点进行解析开拓，但所得解析函数元素未必仍是 $w_1^1(z)$，只可能是 $w_j^1(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, \nu)$ 中的某一个. 这样绕 z_0 反复开拓，必有一次要得到 $w_1^1(z)$，即存在最小的自然数 $\lambda_1 (0 < \lambda_1 \leqslant \nu)$，使得从 $w_1^1(z)$ 出发绕 z_0 开拓 λ_1 次刚好得到 $w_1^1(z)$. 记 $\lambda_j (0 < \lambda_j \leqslant \nu)$ 为 $w_j^1(z)$ 对应的这种数，从而 $w_j^1(z)(j = 1, 2, \cdots, \nu)$ 被分为有限组 $\{w_{j_k}^1(z)\}$ $(k = 1, 2, \cdots, l)$，每组中元素可通过其中一个绕 z_0 解析开拓依次得到. 现设 $w_1(z), \cdots, w_\lambda(z)$ 为其中一组，即从 $w_1(z)$ 出发绕 z_0 解析开拓依次得到 $w_2(z), \cdots, w_\lambda(z), w_1(z)$. 记 $z - z_0 = t^\lambda$，则当 t 绕 $t = 0$ 转一周时，z 绕 $z = z_0$ 转

λ 周,故复合函数

$$w_1(z) = w_1(z_0 + t^\lambda) = w_1^*(t)$$

在 t 平面上 $t = 0$ 处的一个小穿孔邻域 $B_0(0)$ 上单值解析. 以下说明 $t = 0$ 为 $w_1^*(t)$ 的可去奇点. 因为 $A_\nu(z_0) \neq 0$, 选取充分小的 r_0,使当 $z \in \overline{B}_{r_0}(z_0) = \{|z - z_0| \leqslant r_0\}$ 时, $|A_\nu(z)| \geqslant c > 0$ 且 $|A_j(z)| \leqslant K < \infty$, $j = 1, 2, \cdots, \nu - 1$, 故此时

$$|w_1(z)| = \frac{1}{|A_\nu(z)(w_1(z))^{\nu-1}|}|A_{\nu-1}(z)(w_1(z))^{\nu-1} + \cdots + A_0(z)|$$

$$\leqslant \frac{k}{c}(1 + |w_1(z)|^{-1} + \cdots + |w_1(z)|^{-(\nu-1)}).$$

因为当 $|w_1(z)|>1$ 时, $|w_1(z)|\leqslant\frac{\nu k}{c}$,所以有 $|w_1(z)|\leqslant\max\left\{1, \frac{\nu k}{c}\right\}$,即当 $t \in B_0(0) = \{0< |t| <r_0^{1/\lambda}\}$ 时,$w_1^*(t)$ 有界,故 $t = 0$ 为 $w_1^*(t)$ 的可去奇点.

现在 $w_1^*(t)$ 可视为 $B_0(0)$ 上的单值解析函数,故它可表为 $B_0(0)$ 上的一个收敛幂级数:

$$w_1^*(t) = a_0 + a_\tau t^\tau + a_{\tau+1}t^{\tau+1} + \cdots,$$

其中 τ 为某一自然数,a_0, a_τ, $a_{\tau+1}$, $\cdots$ 为复常数,从而 $w_1(z)$ 在圆盘 $B_{r_0}(z_0)$ 上可表为 $z-z_0$ 的分数幂级数:

$$w_1(z) = a_0 + a_1(z - z_0)^{\tau/\lambda} + a_{\tau+1}(z - z_0)^{(\tau+1)/\lambda} + \cdots.$$

这个幂级数也称为 Pusieux 级数,它代表从属于方程(10.1)的一个函数元素. 注意它是 λ 值的,如把 $B_{r_0}(z_0)$ 沿一半径割开,则 $w_1(z)$ 分裂为 λ 个单值解析分支,且绕 z_0 解析开拓时这些分支依次置换. 当 $\lambda = 1$ 时,此即为一解析函数元素,当 $\lambda > 1$ 时,称为代数函数元素.

如果 $A_\nu(z_0) = 0$, 令 $\mu = \frac{1}{w}$, 并考虑

$$\Phi(z, u) = A_0(z)u^\nu + A_1(z)u^{\nu-1} + \cdots + A_\nu(z),$$

再区分两种情况：

1）如 $A_0(z_0) \neq 0$，则同上讨论得

$$u(z) = c_0 + c_\tau(z - z_0)^{\frac{\tau}{\lambda}} + c_{\tau+1}(z - z_0)^{\frac{\tau+1}{\lambda}} + \cdots,$$

故当 $c_0 \neq 0$ 时，

$$w(z) = \frac{1}{c_0} + b_{-\tau}(z - z_0)^{-\frac{\tau}{\lambda}} + b_{-\tau+1}(z - z_0)^{-\frac{\tau-1}{\lambda}} + \cdots;$$

2）如 $A_0(z_0) = 0$，则取 α，使 $\varphi(z_0, \alpha) \neq 0$，作 $w = w^* + \beta$，故

$$\Phi(z, w^*) = \varphi(z, w^* + \beta) = A_\nu^*(z) w^{*^\nu} + \cdots + A_0^*(z) = 0,$$

且 $A_0^*(z_0) \neq 0$，问题化归为情况 1).

总之，对每一点 $z_0 \in \mathscr{C}$，存在 l 个从属于方程(10.1)的代数函数元素 $(w_{\lambda_j}(z))$，$j = 1, 2, \cdots, l$，具有下述 Pusieux 级数表示：

$$w_{\lambda_j}(z) = b_0^{(j)} + b_{\tau_j}^{(j)}(z - z_0)^{\frac{\tau_j}{\lambda_j}} + \cdots,$$

其中 $b_0^{(j)}, b_{\tau_j}^{(j)} \cdots \in \mathscr{C}$，$\lambda_j \in \mathscr{N}$，$\tau_j \in \mathscr{Z}$，$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = \nu$.

我们用 A 表示属于方程(10.1)的全体函数元素. z_0 处的两个函数元素称为等价的，如果存在 z_0 的小邻域 $B(z_0)$，在其上它们恒等. 按这种方式把 A 分为等价类，等价类的全体记为 $\mathscr{A}$. 通过自然投影诱导出 $\mathscr{A}$ 上的拓扑，易验证 $\mathscr{A}$ 为一个 Riemann 面. 当 $z_0 \in T_z$ 时，相应地在 $\mathscr{A}$ 中有 ν 个点；当 $z_0 \in \mathscr{C} \backslash T_z$ 时，相应地在 $\mathscr{A}$ 上有 l 个点 $\widetilde{z}_{\lambda_j}$($j = 1, 2, \cdots, l \leqslant \nu$)，并称 $\widetilde{z}_{\lambda_j}$ 为 $\lambda_j - 1$ 级分支点. 如确有某 $\lambda_j > 1$，则称 z_0 为一分支点. 总之，方程(10.1)所确定的代数体函数是 $\mathscr{A}$ 上的单值解析函数. 有关代数函数和代数体函数的进一步知识读者可参阅文献[HX].

§10.2 代数函数的迭代

§10.2.1 代数函数的复合

设 $P(z, w)$ 为 z 和 w 的不可约二元多项式，由上节知，通过 $P(z, w) = 0$ 可以定义 $\hat{\mathscr{C}}$ 上的代数函数 $w = w(z)$，它满足 $P(z, w(z)) \equiv 0 (z \in \hat{\mathscr{C}})$. 以下为叙述方便计，在说法上我们把 P 和 $w(z)$ 看成同一个. 比如，我们说 P 的函数元素、P 的单值分支、P 的分支点等等，均是指 $w(z)$ 的对应概念.

以下设 $P, Q \in \mathscr{C}[z, w]$ 为 z 和 w 的不可约二元多项式，P 关于 z 是 d 次的，关于 w 是 e 次的；Q 关于 z 是 m 次的，关于 w 是 n 次的. 现在给出复合函数及反函数的定义.

定义 10.2 对于 $z, w \in \mathscr{C}$，定义

$$P^{-1}(z, w) = P(w, z),$$

以及

$$Q \circ P(z, w) = \text{Resultant}(P(z, x), Q(x, w)),$$

这里在构造结式 Resultant$(P(z, x), Q(x, w))$ 时，将 $P(z, x)$ 和 $Q(x, w)$ 均视为 x 的一元多项式. 由于结式是这两个多项式系数的多项式，因此 $Q \circ P \in \mathscr{C}[z, w]$.

例如，对多项式 $p(x) = a_0 \prod_{j=1}^{d} (x - a_j)$ 和 $q(x) = b_0 \prod_{k=1}^{n} (x - b_k)$ 可以得到

$$\begin{aligned}\text{Resultant}(p, q) &= a_0^n b_0^d \prod_{j=1}^{d} \prod_{k=1}^{n} (a_j - b_k) \\ &= a_0^n \prod_{j=1}^{d} q(a_j) = (-1)^{dn} b_0^d \prod_{k=1}^{n} p(b_k).\end{aligned}$$

由定义立刻有下述复合算子的基本性质.

定理 10.2 设 P，Q，P_1，P_2，Q_1 和 Q_2 均为不可约二元多项式，则

1）如果 $P=P_1P_2$ 且 $Q=Q_1Q_2$，那么

$$Q\circ P=(Q_1\circ P_1)(Q_1\circ P_2)(Q_2\circ P_1)(Q_2\circ P_2);$$

2）任取 $a,\ b\in\mathscr{C}\backslash\{0\}$，如 P 对 w 的次数为 e，Q 对 z 的次数为 m，则

$$(bQ)\circ(aP)=a^m b^e(Q\circ P);$$

3）$(Q\circ P)^{-1}=(-1)^{me}(P^{-1}\circ Q^{-1})$；

4）$(w-z)\circ P(z,w)=P(w,z)=P\circ(w-z)$；

5）复合算子"$\circ$"满足结合律.

通常我们把支点以外的点称为正则点. 现在讨论两个代数函数在正则点处的复合.

定理 10.3 设 z_0 是 P 的正则点，并且对于 P 在 z_0 处的每个函数元素 f，$f(z_0)$均为 Q 的正则点，那么 z_0 是 $Q\circ P$ 的正则点，$Q\circ P$ 在 z_0 处的函数元素正是 $g\circ f$，这里 f 是 P 在 z_0 处的函数元素，g 为 Q 在 $f(z_0)$处的函数元素，且二元多项式 $Q\circ P$ 关于 z 的次数为 dm、关于 w 的次数为 en.

证明 设 f_1，…，f_e 为 P 在 z_0 处的 e 个解析函数元素，不失一般性，不妨设 z_0，$f_j(z_0)(j=1,\cdots,e)$ 及它们在 Q 下的像均在$\mathscr{C}$上，则

$$P(z_0,\ x)=c_1\prod_{j=1}^{e}(x-f_j(z_0)),$$

其中 c_1 为某一常数，以及

$$Q\circ P(z_0,w)=c_2\prod_{j=1}^{e}Q(f_j(z_0),w),$$

其中 c_2 为某一常数，并注意到 $Q\circ P(z_0,w_0)=0$ 当且仅当对某个 $j\in\{1,\cdots,e\}$，w_0 为某个 Q 的函数元素在 $f_j(z_0)$处的像，以及 $Q\circ P(z_0,w)$的零点重数与在 z_0 取 w_0 的重数一致，可得到 $Q\circ P$ 关于 w 的次数如定理 10.3 所述，而 $Q\circ P$ 关于 z 的次数正是 $(Q\circ P)^{-1}=\pm P^{-1}$

$\circ Q^{-1}$ 关于 w 的次数. 证毕.

§ 10.2.2 分支点处的复合

设 f 为 P 在 z_0 处的函数元素，分支重数为 α，则在 z_0 的一个穿孔邻域上，f 的 Pusieux 级数可以定义 P 的 α 个解析函数元素，如果 ξ 是这样一个解析函数元素，我们则称 ξ 从属于 f.

更进一步，设 g 是 Q 在 $f(z_0)$ 处的函数元素，并且 f 和 g 中至少有一个是代数函数元素，即 f 和 g 不能全是解析函数元素，那么记 $f\circ g$ 为全体形如 $\eta\circ\xi$ 的解析函数元素的集合，这里 ξ 和 η 分别从属于 f 和 g. 事实上. $f\circ g$ 表示 z_0 的某一穿孔邻域上的一些解析函数元素的集合.

现在有两种情况，其一是 $g\circ f$ 是 $Q\circ P$ 的一个函数元素，即 $g\circ f$ 与 $Q\circ P$ 的一个在 z_0 处的函数元素一致，其二是 $g\circ f$ 中的元素从属于 $Q\circ P$ 在 z_0 处的不同代数函数元素，此时我们称 P 和 Q 的复合使函数元素分裂.

以下考察两个具体例子.

例 10.1 设 $P(z, w)=w-z^2$, $Q(z, w)=w^2-z$, 则 $Q\circ P(z, w)=(w+z)(w-z)$, 所以 $Q\circ P$ 是可约的，并且没有分支点，在 0 和∞处复合会使函数元素分裂. 同样地，对 $P\circ Q(z, w)=(w-z)^2$ 也有这样的情况.

例 10.2 设 $P(z, w)=w-z^2$, $Q(z, w)=w^2-z+1$, 则 $Q\circ P(z, w)=w^2-z+1$. Q 以 $z=1$ 和∞为分支点，而 $Q\circ P$ 仅以 1 和 -1 为分支点，并且 $Q\circ P$ 是不可约的.

究竟什么时候 $g\circ f$ 才会分裂? 下述定理表明这与 f 和 g 在 z_0 处的分支重数和次数有很大关系.

定理 10.4 设 f 为 P 在 z_0 处的函数元素，它具有分支重数 α 和次数 β，g 是 Q 在 $f(z_0)$处的函数元素，它具有分支重数 γ 和次数 δ，则

1) $g\circ f$ 至少分裂在 $T(\beta, \gamma)$个函数元素中，其中 $T(\beta, \gamma)$表示 β 和 γ 的最大公约数；

2) 如果 $Q\circ P$ 是不可约的，那么 $g\circ f$ 恰好分裂在 $T(\beta, \gamma)$个函

数元素中，每个这样的函数元素在 z_0 处具有分支重数 $\alpha\gamma/T(\beta,\gamma)$，次数 $\beta\delta/T(\beta,\gamma)$；

3) 如果 $T(\beta,\gamma)=1$ 且 $g\circ f$ 分裂，那么存在 α 和 δ 的公约数 k，使得 $T(\beta,k)=T(\gamma,k)=1$；

4) 如果 $T(\beta,\gamma)=1=T(\alpha,\delta)$，则 $g\circ f$ 是 $Q\circ P$ 的在 z_0 处的一个完全确定的芽，它具有分支重数 $\alpha\gamma$.

证明 取充分接近 z_0 的正则点 z_1，设 $\xi_1,\cdots,\xi_\alpha$ 是 z_1 处的解析函数元素，它们从属于 f，并且对 $j\in\{1,\cdots,\alpha\}$，设 $\eta_{j_1},\cdots,\eta_{j\gamma}$ 为 $\xi_j(z_1)$ 处从属于 g 的解析函数元素，又设 Γ 为一个围道，它从 z_1 开始并环绕 z_0 一次. 记 Γ^k 为 Γ 的 k 次重跑围道. $\eta_{11}\circ\xi_1$ 从属于 $Q\circ P$ 在 z_0 处的某个函数元素 h，它从 $g\circ f$ 中产生. h 在 z_0 点的分支重数与下面给定的最小自然数 k 一致：将 $\eta_{11}\circ\xi_1$ 沿 Γ^k 延拓又回到 $\eta_{11}\circ\xi_1$. 显然，$g\circ f$ 当且仅当 h 的分支重数小于 $\alpha\gamma$ 时才分裂.

设 $k=\alpha\gamma/T(\beta,\gamma)$，将 ξ_1 沿 Γ^k 延拓又得到 ξ_1，在这个延拓下，从 Γ^k 得到一个道路，它围绕 $f(z_0)$ 跑 $\beta\gamma/T(\beta,\gamma)$ 次，η_{11} 沿这条道路延拓又回到 η_{11}，因此 $\eta_{11}\circ\xi_1$ 沿 Γ^k 的延拓又回到 $\eta_{11}\circ\xi_1$，并且 h 的分支重数是 k 的一个因子. 因为所有从 $g\circ f$ 产生的函数元素的分支重数为 $\alpha\gamma$，由此即得到 1)的证明.

如果 $Q\circ P$ 是不可约的，则 h 在 z_0 处的分支重数恰好为 k. 因为如果 $l<k$，则 $\eta_{11}\circ\xi_1$ 沿 Γ^k 延拓得到一个 $\eta_{jk}\circ\xi_j$，它满足 $j\neq1$（当 l 不是 α 的倍数时），或 $j=1$ 但 $k\neq1$（当 l 是 α 的倍数时），这是因为从 ξ_1 沿 Γ^l 延拓时，得到的道路围绕 $f(z_0)$ 跑 $l\beta/\alpha$ 次，而 l/α 比 $\gamma/T(\beta,\gamma)$ 小，所以 $l\beta/\alpha$ 不是 γ 的倍数. 现在继续前面的讨论，因为 $Q\circ P$ 是不可约的，$Q\circ P$ 在 z_1 处的所有函数元素是两两不同的，特别地，必须有 $\eta_{jk}\circ\xi_k\neq\eta_{11}\circ\xi_1$ 成立. 这就证明了 2).

现在设 $T(\beta,\gamma)=1$，并且 h 在 z_0 处的分支重数 $k_1<\alpha\gamma$. 我们已经知道，k_1 是 $\alpha\gamma$ 的一个因子，设 $k_1k_2=\alpha\gamma$，其中 k_2 为某一自然数. 对于 $q\in\{1,\cdots,k_2-1\}$，$\eta_{11}\circ\xi_1$ 沿 Γ^{qk_1} 延拓得到一个函数元素 $\eta_{jk}\circ\xi_j=\eta_{11}\circ\xi_1$，这里必须有 $j\neq1$，否则将有 qk_1 是 α 的倍数，将 ξ_1 沿 Γ^{qk_1} 延拓得到一个道路，它围绕 $f(z_0)$ 跑 $\beta qk_1/\alpha$ 次. 因为 $T(\beta,\gamma)=1$，且

$$qk_1/\alpha \leqslant (k_2 - 1)k_1/\alpha < \gamma,$$

$\beta qk_1/\alpha$ 不是 γ 的倍数，所以这时将有 $k \neq 1$，因此 $\eta_{1k} \circ \xi_1 \neq \eta_{11} \circ \xi_1$，数 $k_1, 2k_1, \cdots, (k_2-1)k_1$ 也不是 α 的倍数. 此外，因为 $k_1k_2 = \alpha\gamma$，所以 k_2 必须是 α 的一个因子，且 $T(k_2,\gamma) = 1$.

函数元素 f 和 g 具有这样的形式：

$$f(z) = f(z_0) + \left[\varphi\left((z - z_0)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right]^{\beta},$$

$$g(z) = g(f(z_0)) + \left[\psi\left((z - f(z_0))^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\delta},$$

这里 φ, ψ 为 $z = 0$ 处的双全纯函数. $\eta_{11} \circ \xi_1$ 是下面映射的复合：

$$z \mapsto (z - z_0)^{\frac{1}{\alpha}},\ z \mapsto \varphi(z),\ z \mapsto z^{\beta},\ z \mapsto z^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$z \mapsto \psi(z),\ z \mapsto z^{\delta} + g(f(z_0)).$$

（上述根式函数要适当选一分支）. 在这个复合过程中，如果去掉最后一步，我们将得到一个在 z_1 处的解析函数元素 $\widetilde{\eta}_{11} \circ \xi_1$，它沿 $\Gamma^{qk_1}(q \in \{1, \cdots, k_2 - 1\})$ 延拓得到一个函数元素 $\widetilde{\eta}_{jk} \circ \xi_j$，由于 $j \neq 1$，它与 $\widetilde{\eta}_{11} \circ \xi_1$ 是不同的，并由此得

$$(\widetilde{\eta}_{jk} \circ \xi_j)^{\delta} + g(f(z_0)) = \eta_{jk} \circ \xi_k = \eta_{11} \circ \xi_1$$

$$= (\widetilde{\eta}_{11} \circ \xi_1)^{\delta} + g(f(z_0)).$$

特别地

$$\widetilde{\eta}_{jk} \circ \xi_j(z_1) \neq \widetilde{\eta}_{11} \circ \xi_1(z_1),$$

及

$$(\widetilde{\eta}_{jk} \circ \xi_j(z_1))^{\delta} = (\widetilde{\eta}_{11} \circ \xi_1(z_1))^{\delta}.$$

假设 k_2 不是 δ 的因子，或者 $T(\beta,k_2) > 1$，因为存在这样的 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $z \in \mathscr{C}\backslash\{0\}$，在开圆盘 $B(z;\varepsilon|z|) = \{\xi \in \mathscr{C} \mid |\xi - z| < \varepsilon|z|\}$ 上，映射 $z \mapsto z^{\delta}$ 是单射. 此外可选取 ε，使得在映射 $z \mapsto z^{\delta}$ 下

$$B(z;\varepsilon|z|),\ B(z\exp(2\pi i\gamma/k_2);\ \varepsilon|z|) \quad (\gamma \in \{1, \cdots, k_2 - 1\})$$

的像集是不交的（如果 $\gamma\delta/k_2$ 不是整数）.

记

$$c = \left[(z_1 - z_0)^{\frac{1}{\alpha}}\varphi(0)\right]^{\beta/\gamma}\psi'(0),$$

如果 z_1 选得充分靠近 z_0，则

$$\widetilde{\eta}_{11} \circ \xi_1(z_1) \in B(c;\ \varepsilon|c|),$$

及

$$\begin{aligned}\widetilde{\eta}_{jk} \circ \xi_j(z_1) &\in B(c\exp(2\pi \mathrm{i} q k_1 \beta/\alpha\gamma);\ \varepsilon|c|) \\ &= B(c\exp(2\pi \mathrm{i} q \beta/k_2);\ \varepsilon|c|).\end{aligned}$$

现在设 $T(\beta,k_2) > 1$，则 $q\beta|k_2$ 对整数 q 成立. 取这样的一个 q，则有

$$\widetilde{\eta}_{jk} \circ \xi_j(z) \in B(c;\varepsilon|c|);$$

由 ϵ 的选取及

$$\widetilde{\eta}_{jk} \circ \xi_j(z_1) \neq \widetilde{\eta}_{11} \circ \xi_1(z_1),$$

我们又得到下面的矛盾：

$$(\widetilde{\eta}_{jk} \circ \xi_j(z_1))^{\delta} \neq (\widetilde{\eta}_{11} \circ \xi_1(z_1))^{\delta}.$$

如果 $T(\beta,k_2) = 1$，则从上面的假设，k_2 不是 δ 的因子，$\beta\delta/k_2$ 不是整数. 取 $q = 1$，则由 ϵ 的选取，我们得到同刚才一样的矛盾.

综上所述，我们说明了：如果 $T(\beta,\ \gamma) = 1$ 并且 $g \circ f$ 分裂，则 k_2 是 α 和 δ 的公因子，且满足 $T(\beta,\ k_2) = T(\gamma,\ k_2) = 1$，故 3)得证. 4)可从 3)立刻得到. 证毕.

在例 10.1 中我们曾给出两个不可约二元多项式 P 和 Q，使得 $Q \circ P$是可约的. 下面要指出，这种现象只有当复合使得函数元素分裂时才可能发生.

定理 10.5 设 P 和 Q 是不可约的二元多项式，并且 P 与 Q 的复合没有分裂的函数元素，则 $Q \circ P$ 是不可约的.

证明 取一点 z_0 具有如下性质：P 在 z_0 点仅有双全纯的解析函数元素 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_e$，并且 Q 对所有 $j \in \{1,\ \cdots,\ e\}$ 在 $\xi_j(z_0)$ 有解析函数元

素 η_{j1}, …, η_{jm}.

如果从 $\eta_{11}\circ\xi_1$ 通过解析开拓可以得到各个 $\eta_{jk}\circ\xi_j$,那么可导出 $Q\circ P$是不可约的. 我们对 $j=1$ 来分析:

由于 Q 是不可约的,则通过 η_{11}沿一条道路 Γ 延拓可得到 η_{1k},这个 Γ 可作为以下形式的道路的复合:从 $\xi_1(z_0)$沿一条道路 γ 走一直到最近的 Q 的分支点 y,围绕 y 绕一周,再沿 γ^- 走回,这样得到的道路称为 $\widetilde{\gamma}$. 这里 γ 不与 Q 或 P^{-1}的分支点相遇,也不通过 P 的分支点在 P 下的像点. 证明可以这样完成:如果我们找到道路 Δ_j, $j\in\{1, \cdots, m\}$, 那么在其上将 η_{1j}沿$\widetilde{\gamma}$延拓得到 η_{1q},则 $\eta_{1j}\circ\xi_1$ 沿 Δ_j 延拓就得到 $\eta_{1q}\circ\xi_1$.

为此,将 ξ^{-1}沿 γ 延拓,与此同时从 γ 得到一条从 z_0 开始的道路. 此外,从 γ 的终点得到一个解析函数元素 ξ,它从属于 P^{-1}在 y 处的一个函数元素. 设 $x=\eta(y)$, ξ_1 沿 δ 延拓得到 ξ^{-1}, ξ^{-1}从属于 P 在 x 处的一个函数元素 f,这里 $f(x)=y$;δ 的像在这个延拓下还是 γ, η_{1j}沿 γ 延拓得到一个解析函数元素 ρ_0, ρ_1 是 ρ_0 绕 y 跑一周得到的. 由假设没有函数元素分裂,则在 δ 的终点(从 x 开始充分绕行),从 $\rho_0\circ\xi^{-1}$得到函数元素 $\rho_1\circ\xi^{-1}$,将 δ 围绕 x 跑,再与 δ^{-1}复合,便具有 Δ_j 所需的性质. 证毕.

§10.2.3 迭代

首先给出迭代的定义.

定义 10.3 对于二元多项式 $P(z, w)$及 $n\in\mathcal{N}$, 定义迭代序列 $P^{\cdot n}\in\mathscr{C}[z, w]$:

$$P^{\cdot 0}(z, w)=w-z,\ P^{\cdot n}(z, w)=P^{\cdot(n-1)}\circ P(z, w).$$

由前面关于复合算子"$\circ$"的讨论易知代数函数的迭代序列不一定是一个代数函数序列,迭代有可能产生函数元素的分裂. 以下考察几个例子.

例 10.3 设 P 是不可约二元多项式,并且 $P=P^{-1}$, 则 $P^{\cdot 2}$是可约的. 因为如果 f 是 P 在 z_0 处的双全纯解析函数元素,则 f^{-1}是 P 在

$f(z_0)$处的一个函数元素，且 $f^{-1}\circ f=id$. 因此 id 是 $P^{\circ 2}$在 z_0 处的函数元素，且 $w-z$ 整除多项式 $P^{\circ 2}$.

例 10.4 $P(z,w)=(w-z)^2-z^3$ 在 0 处仅有一个函数元素 f，并且在∞仅有一个函数元素 g；f 在 0 处有分支重数 2 和次数 2，且 $f(0)=0$；g 在∞处有分支重数 2 和次数 3，且 $g(\infty)=\infty$，由定理 10.4可知，$P^{\circ n}$在∞处仅有函数元素 $g^{\circ n}$，它具有分支重数 2^n. 特别地，$P^{\circ n}$也是不可约的. 另外，从定理 10.4 同样可知 $f^{\circ n}$有 2^{n-1}个分裂的函数元素，每个具有分支重数 2 和次数 2.

例 10.5 $P(z,w)=w^2-(z-1)(z-1-2\mathrm{i})$ 以 1 和 $1+2\mathrm{i}$ 为分支点，$z=1$ 的唯一的原像为 $1+\mathrm{i}$. 进一步 $P^{\circ 2}$具有分支点 1 和 $1+2\mathrm{i}$，它们都是 $1+2\mathrm{i}$ 的原像. 与此相反，$1+\mathrm{i}$ 是 $P^{\circ 2}$ 的正则点，对 $P^{\circ 2}$的分支点进一步分析可导出：$P^{\circ 2}$是不可约的.

例 10.6 设 $P(z,w)=w^2-(z^3+c)$，这里常数 $c\in\mathscr{C}\setminus\{0\}$. P 以∞和 c 的三个三次方根为支点，它们的每个分支重数是 2，且 P 以∞和 0 为临界点，用分支重数整除次数，由定理 10.4 可知，在 P 的迭代过程中，没有函数元素分裂. 由定理 10.5 还知道所有 $P^{\circ n}$均是不可约的.

§ 10.2.4 Möbius 变换下的共轭

设 P 为一个二元多项式，φ是一个 Möbius 变换，以下我们用 φ表示映射

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}\quad(a,\,b,\,c,\,d\in\mathscr{C},\,ad-bc=1),$$

或者多项式 $w(cz+d)-(az+b)$.

我们有下述定理.

定理 10.6 设 $Q=\varphi^{-1}\circ P\circ\varphi$, 则

1) P 关于 z(或 w)的次数与 Q 关于 z(或 w)的次数相同；

2) P 不可约当且仅当 Q 不可约；

3) 如果 f 是 P 在 z_0 处的函数元素，则 $\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi$为 Q 在 $\varphi^{-1}(z_0)$处的函数元素；

4) z_0 是 P 的正则点当且仅当 $\varphi^{-1}(z_0)$是 Q 的正则点；

5) 如果将 P 的函数元素 g 沿道路 γ 解析开拓得到 P 在 z_0 处的函数元素 f，则 $\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi$ 为 $\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi$ 沿 $\varphi^{-1}\circ\gamma$ 解析开拓得到的；

6) 对于所有 $n\in\mathscr{N}$，$Q^{\circ n}=\varphi^{-1}\circ P^{\circ n}\circ\varphi$.

以上六个结论均可由复合算子"∘"的基本性质推得，这里略去详细过程. 此处还要介绍一个等式：

$$\varphi\circ\varphi^{-1}(z,\ w)=w-z.$$

以下给出共轭的定义.

定义 10.4 设 P 和 Q 为两个二元多项式，P 与 Q 称为共轭的，如果存在一个 Möbius 变换 φ 及常数 $k\in\mathscr{C}\backslash\{0\}$，使得下述等式成立：

$$P(z,\ w)=k(\varphi^{-1}\circ Q\circ\varphi(z,\ w)).$$

易见共轭关系是一个等价关系.

§10.2.5 Riemann 球面上的动力系统

上面我们知道，通过一个不可约的二元多项式 $P(z,\ w)$ 可以给出 $\hat{\mathscr{C}}$ 上一个代数函数. $\hat{\mathscr{C}}$ 上的一个无穷序列 $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ 称为 P 的一条前向轨道，如果 $P(z_k,\ z_{k+1})=0(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$；无穷序列 $(z'_k)_{k=0}^{\infty}$ 称为 P 的一条后向轨道，如果 $P(z'_{k+1},\ z'_k)=0(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$. 易见很多情况是：从一点 z_0 出发有无穷多个前向轨道. P 在 $\hat{\mathscr{C}}$ 上的所有轨道决定了一个动力系统.

对照单值复解析动力系统，我们同样希望按 P 的动力学性质把 $\hat{\mathscr{C}}$ 分解为若干互不相交的子集. 就正规性概念的推广而言，这里遇到了 z_0 的前向轨道可能与分支点相交的困难，因此，除经典的 Fatou 集(即稳定集)和 Julia 集(即非稳定集)之外，这里还要专门注意由上述 z_0 组成的集合. 以下给出定义.

定义 10.5 对于给定的不可约二元多项式 P，记

$V^*=V^*(P)=\text{Closure}\{z\in\hat{\mathscr{C}}\mid z$ 的前向轨道与 P 的支点相遇$\}$；

$V=V(P)=\{z\in V^*\mid z$ 至少有一个前向轨道全在 V^* 中$\}$，

V 称为分支集合.

显然 $\hat{\mathscr{C}}\backslash V^*$ 是向前不变的，就是说，如果 $z \notin V^*$，且 $P(z,w)=0$，那么一定有 $w \notin V^*$，因此 V^* 和 V 均是向后不变的.

以下要说明的是,同单值复动力系统的根本区别发生在集合 $V(P)$ 上.

定理 10.7 设 $z \in V^*\backslash V$，则存在自然数 n，使得对所有满足 $P^{\circ n}(z, w)=0$ 的 w 有 $w \in \hat{\mathscr{C}}\backslash V^*$，并且 z 是 V^* 上的孤立点.

证明 如果 $z_0 \in V^*\backslash V$，则任取 z_0 的一条前向轨道，在有限步之后，该轨道跑出 V^*，进入 $\hat{\mathscr{C}}\backslash V^*$.

假设这个步数对所有从 z_0 发出的前向轨道不是一致有界的，那么可以找到 $z_1 \in V^*$，满足 $P(z_0, z_1)=0$，使得 z_1 的前向轨道跑出 V^* 的步数也不是一致有界的. 这样下去，我们可以找出 z_0 的一个前向轨道，它全在 V^* 中，这是矛盾的，从而定理的前一半得证.

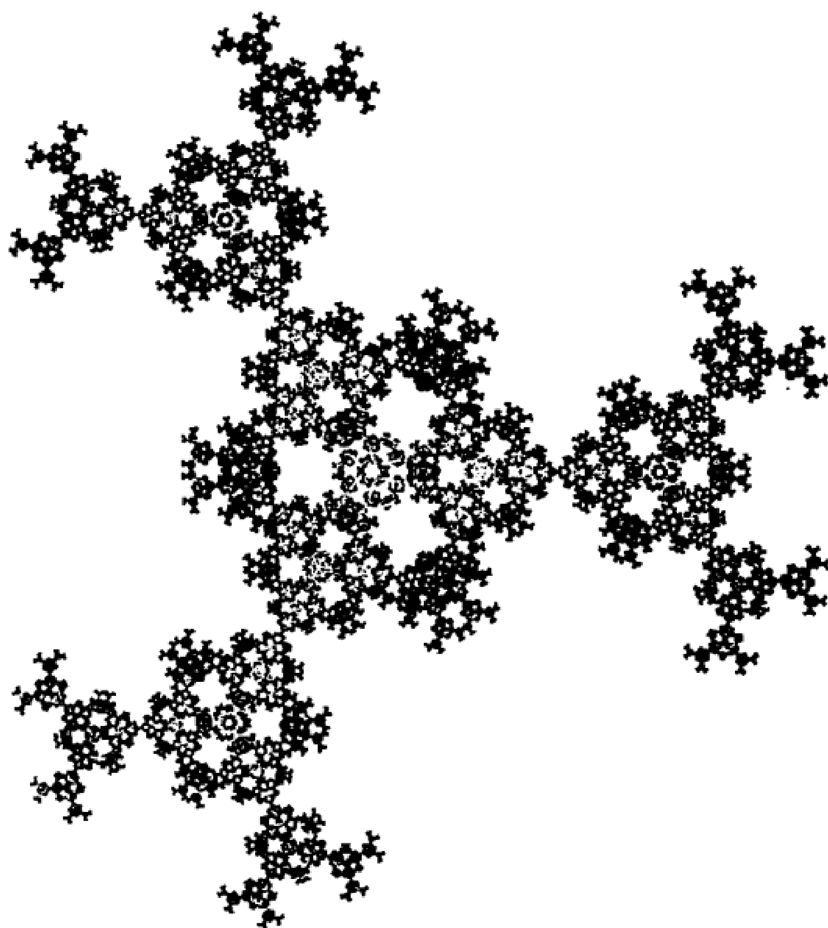


图 10.1 $w^2=(z+2.24)^3$ 的分支集合 V

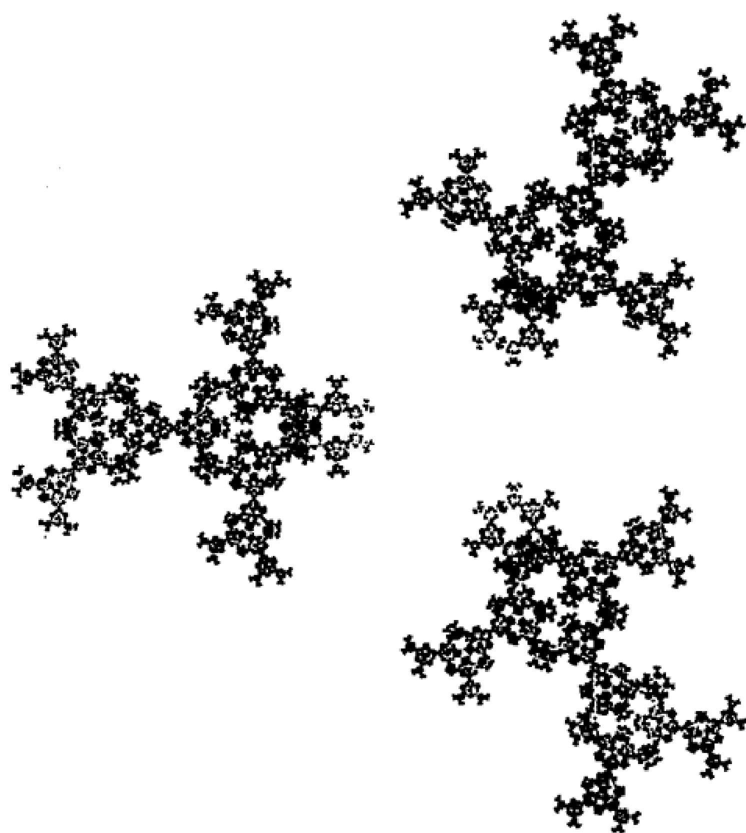


图 10.2 $w^2 = z^3 + 2.3$ 的分支集合 V

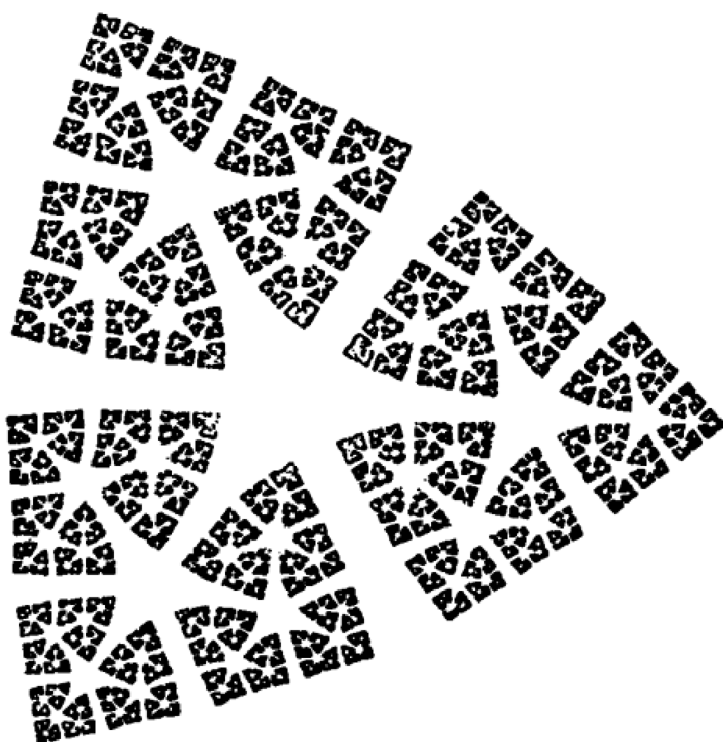


图 10.3 $w^2 = (z - 2)^3$ 的分支集合 V,这是一个 Cantor 集

假如 $z_0 \in V^*$ 不是 V^* 的孤立点，则存在 P 的某个分支点的后向轨道上的点 $x_1, x_2, \cdots$，它们相互判别，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z_0$. 给定 $n \in \mathcal{N}$，则存在 $P^{\cdot n}$ 的函数元素 f，它在 z_0 的一个邻域上具有以下性质：无穷多个 $f(x_n)$ 位于上述分支点的后向轨道上. 因为 f 是连续的，所以

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

从而 $f(z_0) \in V^*$，从断言的第一部分得到 z_0 必须在 V 中. 证毕.

下面研究 V 的性质.

定理 10.8 设 P 为一代数函数，则

1）如果 P 的分支点存在，则 V 是非空集，且 V 是闭的、向后不变的；

2）对于自然数 $n \in \mathcal{N}$，有

$$V(P^{\cdot n}) \subseteq V(P);$$

3）对于 Möbius 变换 φ，有

$$V(\varphi^{-1} \circ P \circ \varphi) = \varphi^{-1}(V(P)).$$

证明 1）由定义 10.5 可知，V^* 是闭的，而由定理 10.7 得知 $V^* \setminus V$ 由 V^* 上的一些孤立点组成，故 V 也是闭的. 如果 $(\nu_n)(-n \in \mathcal{N})$ 是分支点 ν_0 的一条后向轨道，并且集合 $\{\nu_n: -n \in \mathcal{N}\}$ 具有一个极限点 x，则从定理 10.7 得 $x \in V$；如上述集合不存在极限点，则 ν_0 的向后轨道是周期的，从而周期点 ν_n 在 V 中.

2）显然，下述包含关系成立：

$\{z \in \hat{\mathscr{C}} \mid z$ 的 $P^{\cdot n}$-前向轨道与 $P^{\cdot n}$的一个分支点相遇$\}$

$\subseteq \{z \in \hat{\mathscr{C}} \mid z$ 的 P-前向轨道与 P 的分支点相遇$\}$.

如果 P 的迭代没有分裂的函数元素，则等式也成立，此即

$$V^*(P^{\cdot n}) \subseteq V^*(P).$$

由此易见 2)成立.

3）可从 Möbius 变换的基本性质直接导出，这里略去详述. 证毕.

现在考虑按动力学性质来分解 $\hat{\mathscr{C}}$.

任取 $z \in \hat{\mathscr{C}} \backslash V^*$，如果 $U \subset \hat{\mathscr{C}} \backslash V^*$ 是 z 的一个开的、单连通的邻域，则对每个自然数 n，$P^{\cdot n}$在 z 处的每个函数元素可以通过明确的方法延拓成 U 上的亚纯函数. 我们通过这种方法得到 U 上一个亚纯函数族 $\mathscr{F}(P,U)$.

任取一点 $z \in V^* \backslash V$，由定理 10.7 可知，存在这样的最小自然数 N：它以后的 z 的前向轨道点全在$\hat{\mathscr{C}} \backslash V^*$中，并设 α 为 $P^{\cdot N}$在 z 处的函数元素的分支重数的最小公倍数. 又设 $U \subset (\hat{\mathscr{C}} \backslash V^*) \cup \{z\}$ 是 z 的一个开的单连通邻域，使得每个 $P^{\cdot N}$在 z 处的函数元素 f 可以延拓成一个亚纯函数$\tilde{f}:\tilde{U} \mapsto \hat{\mathscr{C}}$，这里$\tilde{U}$是关于 z 的邻域 U 的 α 叶多重覆盖. 函数族 $\mathscr{F}(P, U)$由形如 $g \circ \tilde{f}$的函数组成，这里 $g \in \mathscr{F}(P, \tilde{f}(\tilde{U}))$.

至此，对任一点 $z \in \hat{\mathscr{C}} \backslash V$，我们均定义了 z 的局部邻域上的亚纯函数族 $\mathscr{F}(P, U)$.

定义 10.6 P 的 Fatou 集由这样的点组成：此点在集合$\hat{\mathscr{C}} \backslash V$ 上，且在此点处存在一个开的、单连通邻域 $U \subset \hat{\mathscr{C}} \backslash V$，使得函数族 $\mathscr{F}(P, U)$是正规的. P 的 Fatou 集记为 $F(P)$；P 的 Julia 集 $J(P)$ 由 $J(P) = \hat{\mathscr{C}} \backslash (F(P) \cup V(P))$ 定义.

这样按动力学性质，$\hat{\mathscr{C}}$被分解为三个互不相交的集合 V，F 和 J. 显然 F 是开的、向前不变的；J 是闭的、向后不变的. 以下给出代数函数的动力学分类.

定理 10.9 设 P 是不可约的，$V \neq \varnothing$ 且 $J \neq \varnothing$，则 $P(z, w)$与 $w^e - z^d$ 或 $w^e z^d - 1$ 共轭，这里自然数 $d > e > 1$.

证明 设不可约二元多项式 P 关于 z 的次数为 d，关于 w 的次数为 e，如果 Julia 集 $J(P) \neq \varnothing$，则存在一点 $z_0 \in J(P) \backslash V^*(P)$（从 Fatou 集和 Julia 集的定义，这是显然的）. 取一个开的单连通邻域 U，使得 $z_0 \in U \subset \hat{\mathscr{C}} \backslash V(P)$，并且 $\mathscr{F}(P,U)$不是正规族. 因为 $\mathscr{C} \backslash V^*(P)$是向前不变的，由 Montel 定理可知，$V^*$ 最多由两个点组成. 如果还有 $V \neq \varnothing$，则 P 仅有两个分支点 a 和 b，且 $V^* = V = \{a, b\}$，无妨设 a，$b \in$

$\hat{\mathscr{C}}$. 从 Riemann-Hurwitz 公式，应用 P 的 Riemann 面到 $\hat{\mathscr{C}}$ 的投影，我们有

$$1 - e + \frac{1}{2} \sum_{f} (f \text{ 的分支重数} - 1) \geqslant 0,$$

上式中 f 遍取 P 在 a 和 b 处的函数元素. 从此知，P 在 a 和 b 处各存在一个分支重数为 e 的函数元素. 再由 V^* 的向后不变性，得

$$P(z, a) = c_1(z - a)^{d_1}(z - b)^{d_2},\ d_1 + d_2 = d,$$

及

$$P(z, b) = c_2(z - a)^{d_3}(z - b)^{d_4},\ d_3 + d_4 = d,$$

这里 c_1, c_2 均为常数，d_1, d_2, d_3, d_4 均为自然数.

以下区分两种情况.

1）当 $d_1 \neq 0$ 时，此时 $P(a, a) = 0$，并且 a 仅有一个像点，故

$$P(a, w) = c_3(w - a)^d,$$

这里 c_3 为常数，且 $d_3 = 0$，即

$$P(z, b) = c_2(z - b)^d.$$

从上式同理可得

$$P(b, w) = c_4(w - b)^d,$$

这里 c_4 为常数，且 $d_2 = 0$，即

$$P(z, a) = c_1(z - a)^d.$$

现在通过 Möbius 变换将 a 和 b 分别变为 0 和∞，则从下面的引理10.1可知 P 与

$$\alpha_1 w^e - \alpha_2 z^d$$

共轭，其中 α_1, $\alpha_2 \in \mathscr{C} \backslash \{0\}$，因此 P 也与

$$w^e - z^d$$

共轭. 如果 $e \neq d$，则由 $V \neq \varnothing$ 知 $e > 1$，再由 $J \neq \varnothing$ 得 $d > e$.

2）当 $d_2 \neq 0$ 时，同第一种情况类似，有

$$P(b, w) = c_1(w - a)^e,$$

$$P(z, b) = c_2(z - a)^d,$$

$$P(a, w) = c_3(w - b)^e,$$

$$P(z, a) = c_4(z - b)^d,$$

这里 c_1, c_2, c_3, c_4 均为常数. 再从下述引理 10.1 便可断言定理 10.9 对情形 2)成立,因此,证明了下述引理 10.1,定理 10.9 便得证.

引理 10.1 设不可约二元多项式 P 关于 z 的次数为 d,关于 w 的次数为 e,且 P 仅有两分支点 0 和∞.

1) 如果 0 和∞在 P 下是完全不变的,则

$$P(z, w) = \alpha_1 w^e - \alpha_2 z^d,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{C}\setminus\{0\}$, 并且 d 和 e 互素;

2) 如果∞是 0 的像及原像,并且反向,则

$$P(z, w) = \alpha_1 w^e z^d - \alpha_2,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{C}\setminus\{0\}$, 且 d 和 e 互素.

证明 1) 由于 P 在 0 处仅有一个分支重数为 e 的函数元素,在 0 的一个邻域上,由这个函数元素得到一个函数 $f = f(\xi)$. 由于 P 在$\mathscr{C}$上没有其他分支点,也没有极点,因此 f 可以解析延拓成$\mathscr{C}$上的全纯函数. 在∞处 P 同样也仅有一个函数元素,∞是它的不动点,因此当 $\xi \to \infty$ 时,$f(\xi) \to \infty$,从而,f 是一个多项式,并以 0 为其唯一的零点,于是 $f(\xi) = \alpha\xi^d$, 其中 $\alpha \in \mathscr{C}\setminus\{0\}$ 为一常数. 记 $z = \xi^d$, 进一步有:

$$P(z, w) = 0$$

等价于

$$P(\xi^d, w) = 0,$$

等价于

$$w = f(\exp(2\pi i j/e)\xi),$$

其中 j 为$\{1, \cdots, e\}$中的一个数. 上式又等价于

$$\prod_{j=1}^{e}(w-\alpha\exp(2\pi\mathrm{i}jd/e)\xi^{d})=0,$$

其中 α 为某一非零常数. 上述多项式也具有同样的零点，并且不仅对 w，对 ξ 也具有同 $P(\xi^{e},w)$ 一样的次数. 这两个多项式至多相差一个常数，结合 P 的不可约性便得到我们所需要的结论.

2) 将 1)中的讨论应用于 $z^{d}P\left(\frac{1}{z},w\right)$，显然可导出这里所需的结论. 证毕.

从定理 10.9 可见，除去极少的一些代数函数外，Julia 集和集合 V 不能同时出现，即 $\overline{\mathscr{C}}$ 一般被分解为 $\hat{\mathscr{C}}=J\cup F$ 或者 $\hat{\mathscr{C}}=V\cup F$. 这说明单值复解析动力系统中的动力二分性在这里大体上还成立. 然而，值得注意的是，对于代数函数 P，其分支点的存在性决定了 V 的非空性(见定理 10.8)，所以一般情况是 $\hat{\mathscr{C}}$ 分解为 $\hat{\mathscr{C}}=V\cup F$. 就是说，在代数函数的动力系统中，传统的 Julia 集一般是不存在的.

§10.2.6 关于常值极限函数

上节末我们已指出，在代数函数的动力系统的研究中，集合 V 是十分重要的. 本节将导出关于 V 的与经典 Julia 集相类似的一个结果.

定义 10.7 $x\in\hat{\mathscr{C}}$ 称为 P 的点收缩子，如果存在某个 $z_0\in\mathscr{C}$ 及 z_0 的一个开的单连通邻域 U，对每个 $n\in\mathscr{N}$，在 U 上定义了 P 的迭代 $P^{\cdot k(n)}$ 的一个亚纯函数元素 f_n，使得序列 (f_n) 紧一致收敛于常数 x.

定义 10.8 一个 $z_0\in F(P)$ 称为 P 的收缩元，如果存在 z_0 的一个开的单连通邻域 U，使得对每个 $\mathscr{F}(P,U)$ 中的收敛的非常数序列，它的极限函数是常数.

由有理函数 R 的动力学性质知，$J(R)$ 与 R^{-1} 的点收缩子相同. 类似地，代数函数 P 的分支集合 $V(P)$ 与 P^{-1} 的点收缩子集合也有一定关系，但一般两者是不相同的，见例 10.7.

例 10.7 通过

$$z\mapsto\frac{z+1}{2\sqrt{z}}$$

定义了一个$\hat{\mathscr{C}}$上的代数函数 P，P 在 $z=1$ 处具有两个解析函数元素，$z=1$ 的像分别为 1 和 -1；在 $z=-1$ 处具有两个双全纯的解析函数元素，$z=-1$ 的像却均为 0，并且 P 在 0 和∞处均有一个分支重数为 2 的函数元素，0 和∞的像均为∞，故集合$\{1, -1, 0, \infty\}$是完全不变的，且易见

$$V(P)=\{1, -1, 0, \infty\}.$$

又显然∞为 P^{-1}的唯一的点收缩子，所以 P^{-1}的点收缩子集合在 $V(P)$中，但不等于 $V(P)$.

现在有如下广泛的结论.

定理 10.10 设 P 为$\hat{\mathscr{C}}$上的代数函数，且 $J(P)=\varnothing$，如果 $x\in\hat{\mathscr{C}}$是 P^{-1}的点收缩子，则 $x\in V(P)$.

证明 对点收缩子 x，取邻域 $U\ni z_0$ 及 f_n 如定义 10.7 所述，我们不妨设序列$\{f_n\}$在整个 U 上一致收敛于 x.

因为 f_n 均不能为常数，所以可选取 $a, b\in U$，使得对所有 $n\in\mathscr{N}$ 成立 $f_n(a)\neq x$，$f_n(a)\neq f_n(b)$，$f_n(b)\neq x$.

假设 $x\notin V(P)$，那么存在一个开的单连通集合 W，满足 $x\in W$ 及 $W\backslash\{x\}\subset\hat{\mathscr{C}}\backslash V^*$. 设 N 是这样的最小自然数，使得每个 x 的前向轨道在 N 步之后位于$\hat{\mathscr{C}}\backslash V^*$中. 用 α 表示 P^{-N}在 x 处的函数元素的分支重数的最小公倍数，并用$\widetilde{W}$表示 W 的 α 叶覆盖，在其上定义了 $\mathscr{F}(P, W)$(如 $x\in\hat{\mathscr{C}}\backslash V^*$，可取 $N=0$，$\alpha=1$ 及 $\widetilde{W}=W$). 由于函数族 $\mathscr{F}(P, W)$是正规的，因此 $\mathscr{F}(P, W)$在 W 的相对紧集中等度连续，不妨设 $\mathscr{F}(P, W)$在 W 上等度连续. 取 $\delta>0$ 充分小，使圆盘 $B(x, \delta)\subset W$，并且只要 δ 充分小还可使得：任取 $g\in\mathscr{F}(P, W)$，$z_1, z_2\in\widetilde{W}$，只要 $|z_1-z_2|<2\delta^{\frac{1}{\alpha}}$，便有

$$|g(z_1)-g(z_2)|<|a-b|. \tag{10.3}$$

现在取一个 $n>N$，使 $f_n(U)\subset B(x, \delta)$. 再取 U 中连接 a 和 b 的

一条道路 γ，它与 x 在 f_n 下的原像相遇. 由关于 W 和 x 的假设，$P^{\cdot n}$在 W 上没有分支点，故 f_n 在 a 的一个邻域上是双全纯的，从而存在一个 $g \in \mathscr{F}(P, W)$，使得

$$g \circ \widetilde{f}_n = id$$

在 a 的一个邻域上成立，这里$\widetilde{f}_n$ 是 f_n 在$\widetilde{W}$上的提升. 沿 γ 解析开拓知，上式在 b 的一个邻域上也成立. 特别地，

$$g(\widetilde{f}_n(a)) = a, \ g(\widetilde{f}_n(b)) = b. \tag{10.4}$$

因为

$$|\widetilde{f}_n(a) - \widetilde{f}_n(b)| < 2\delta^{\frac{1}{q}}, \tag{10.5}$$

故由(10.3)式、(10.4)式和(10.5)式得：

$$|a - b| = |g(\widetilde{f}_n(a)) - g(\widetilde{f}_n(b))| < |a - b|,$$

这是矛盾的，从而定理 10.10 证毕.

推论 10.1 设 $J(P) = \varnothing$，如果 P 的所有分支点在 $F(P^{-1})$中，且是 P^{-1}的收缩元，则 P^{-1}的点收缩子集合与 $V(P)$相等.

证明 由定理 10.10 知，点收缩子在 $V(P)$中. 设 $x \in V(P)$，那么，由定义存在 P 的一个分支点 ν 及$(P^{-1})^{\cdot k(n)}$在 ν 处的一个函数元素 f_n，使得序列$\{f_n\}$收敛于 x，从而$\{f_n\}$在 ν 的一个邻域上为正规族. 取$\{f_n\}$的一个收敛的子序列，它的极限函数一定是常数，记为 x_0，$x_0 = x$ 便为 P^{-1}的点收缩子. 证毕.

§10.3 整代数体函数的迭代[QR]

在上一节中，我们介绍了 Riemann 面上代数函数的迭代动力系统，这一节我们研究超越整代数体函数的迭代动力系统. 对照代数函数的迭代，这里遇到的第一个问题是无法从整体上给出超越整代数体函数迭代的概念. 对于代数函数集合，在一定条件下，它关于复合算子是封闭的，从而代数函数的迭代序列自然是一个代数函数序列. 这种统一

的解析结构为我们研究迭代序列的正规性提供了方便. 然而，整代数体函数集合关于复合算子不再是封闭的，换言之，两个超越整代数体函数的复合函数未必仍是整代数体函数，所以，一般来说，一个超越整代数体函数的迭代序列不具有良好的解析结构，从而，这一节绝大多数问题的处理与上一节是完全不同的.

从上一节知，对绝大多数代数函数 P，Julia 集 $J(P)$总是消失的，代之出现的是一个极为复杂的集合 $V(P)$. 本节将给出超越整代数体函数的局部迭代序列的定义，在这个定义下，超越整代数体函数的 Julia 集仍可能是一个极为复杂的集合. 进一步，我们将证明映射在 Julia 集上周期轨道的稠密性、映射在 Julia 集上的传递性，以及映射对初始值的敏感依赖性，即映射在 Julia 集上呈现混沌现象.

同时，下面我们将看到，当 Julia 集消失时，往往有一个更为复杂的集合 V 出现. 本节最后一段将介绍 Julia 集和集合 V 的一种相似性质.

值得一提的是，我们建立了整代数体函数的迭代与有限个超越整函数的随机迭代之间的一个明确关系. 本节的结果将表明：整代数体函数的动力系统与经典的整函数动力系统有许多共同的性态，同时也存在大量深刻的差异. 总之，整代数体函数的动力系统的重要性不仅在于它是经典单值动力系统的自然推广，还在于它本身具有很多独特的性质.

§10.3.1 轨道及复平面的分解

设超越整代数体函数 $W = f(z)$ 由不可约方程(10.1)定义，且 $A_\nu(z) \equiv 1$，即

$$\varphi(z, f(z)) = f^\nu(z) + A_{\nu-1}(z)f^{\nu-1}(z) + \cdots + A_1(z)f(z) + A_0(z) \equiv 0, \qquad (10.6)$$

由 f 的超越性知，$A_j(z)(j = 0, 1, \cdots, \nu-1)$ 至少有一个是超越整函数. $W = f(z)$ 是$\mathscr{C}$到自身的 ν-值解析映射.

我们首先给出轨道的概念.

定义 10.9 任取 $z_0 \in \mathscr{C}$，如果复数序列(z_j)满足

$$\varphi(z_j, z_{j+1}) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \cdots),$$

则称(z_j)为z_0的一个前向轨道；如果复数序列(z'_j)满足

$$\varphi(z'_{j+1}, z'_j) = 0 \ (j = 0, 1, 2, \cdots, z_0 = z'_0),$$

则称(z'_j)为z_0的一个后向轨道.

易见，如果z_0不是f的分支点，则z_0在f下有ν个像点，所以，z_0可能有无穷多个前向轨道；如果z_0不是f的 Picard 例外值，则z_0在f下有无穷多个原像，故z_0有无穷多个后向轨道. 以下记

$$f^{\circ n}(z_0) = \{z_n \mid (z_j) \text{ 为 } z_0 \text{ 的一个前向轨道}\};$$

$$f^{-\circ n}(z_0) = \{z'_n \mid (z'_j) \text{ 为 } z_0 \text{ 的一个后向轨道}, z_0 = z'_0\},$$

我们再给出周期轨道的定义.

定义 10.10 设(z_j)为z_0的一个前向轨道，如果存在一个最小的自然数p，使得

$$z_{j+p} = z_j (j = 0, 1, 2, \cdots),$$

则称(z_j)为一个周期为p的周期轨道. 此时，如果在每个$z_j (j = 0, 1, \cdots, p-1)$处存在$f$的一个单值解析分支$f_{z_j}$，使得

$$f_{z_j}(z_j) = z_{j+1},$$

记

$$g(z) = f_{z_{p-1}} \circ \cdots \circ f_{z_1} \circ f_{z_0}(z),$$

则$\lambda = g'(z_0)$称为周期轨道(z_j)的特征值. 当$\lambda = 0$时，称(z_j)为超吸引周期轨道；当$0 < |\lambda| < 1$时，称(z_j)为吸引周期轨道；当$|\lambda| > 1$时，称(z_j)为排斥周期轨道；当$|\lambda| = 1$时，称(z_j)为中性周期轨道. 特别地，若$\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathscr{R}$, 则当θ为有理数时，称(z_j)为有理中性周期轨道；当θ为无理数时，称(z_j)为无理中性周期轨道.

用复解析的观点，如果一点$z_0 \in \mathscr{C}$的前向轨道与分支点相遇，则在z_0处，动力系统的性质是十分特别和复杂的，因此，有必要引进记号：

$V_f^* = \text{Closure}\{z \in \mathscr{C} \mid z$ 有一个前向轨道点，其前像点个数$\leqslant \nu - 1\}$；

$V_f = \text{Closure}\{z \in V_f^* \mid z$ 至少有一个前向轨道全在 V_f^* 中$\}$.

易见，V_f^* 和 V_f 均是向后不变的闭集. 类似于定理 10.7，我们有下述命题.

命题 10.1 任取 $z_0 \in V_f^* \backslash V_f$，则存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，

$$f^{-n}(z_0) \subset \mathscr{C} \backslash V_f^*.$$

上述结果说明，真正引起复杂和困难的是集合 V_f，而不是 $V_f^* \backslash V_f$ 上的点. 命题 10.1 的证明可参照定理 10.7 的证明，这里略去.

以下定义 f 的局部迭代序列.

任取一点 $z_0 \in \mathscr{C} \backslash V_f^*$，存在 z_0 的单连通邻域：

$$U \subset \mathscr{C} \backslash V_f^*,$$

由于 f 在 U 上可分为 ν 个单值解析分支，任取其中一个，记为 $\alpha(z)$，取 z_0 的充分小的单连通邻域 $U_\alpha \subset U$，使得 $\alpha(U_\alpha)$ 为单连通区域，从而 f 在 $\alpha(U_\alpha)$ 上可分为 ν 个单值解析分支：

$$f_j(z) \ (j = 1, 2, \cdots, \nu),$$

故

$$f_j \circ \alpha(z) \ (j = 1, 2, \cdots, \nu)$$

为 U_α 上的 ν 个单值解析函数，且由(10.6)知

$$[f_j \circ \alpha(z)]^\nu + A_{\nu-1}(\alpha(z))[f_j \circ \alpha(z)]^{\nu-1} + \cdots + A_0(\alpha(z)) \equiv 0$$

$$(j = 1, 2, \cdots, \nu). \tag{10.7}$$

由于 $A_j(\alpha(z))$ $(j = 0, 1, \cdots, \nu - 1)$ 在 U 上解析，所以方程

$$W^\nu + A_{\nu-1}(\alpha(z))W^{\nu-1} + \cdots + A_0(\alpha(z)) = 0$$

定义了 U 上一个 ν-值解析函数 $w(z)$. 再由$\mathscr{C} \backslash V_f^*$ 的向前不变性知，$w(z)$在 U 上没有分支点，故$w(z)$可分为 U 上的 ν 个单值解析函数：

$$w_1(z), w_2(z), \cdots, w_\nu(z).$$

由(10.7)式易见,任取一个 $f_j\circ\alpha(z)$,均存在某个 $w_{k_j}(z)$,使得

$$f_j\circ\alpha(z)=w_{k_j}(z),\ z\in U_\alpha.$$

这样,我们把 $f_j\circ\alpha(z)$解析开拓为 U 上的一个单值解析函数 $w_{k_j}(z)$.

至此,我们可以通过 f 与其自身的复合产生 U 上 ν^2 个单值解析函数. 类似地,我们可以把 f 的 n 次迭代 $f^{\circ n}$视为 U 上的 ν^n 个单值解析函数,从而, $f^{\circ n}(z)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 产生了 U 上的一个单值解析函数族,记为 $\mathscr{F}(f,U)$.

现在给出 Fatou 集和 Julia 集的定义.

定义 10.11 任取 $z_0\in\mathscr{C}\backslash V_f^*$,如果存在 z_0 的充分小的单连通邻域 $U\subset\mathscr{C}\backslash V_f^*$,使得 $\mathscr{F}(f,U)$是正规族,则称 z_0 为稳定点;任取 $z_0\in V_f^*\backslash V_f$,由命题 10.1,存在一个最小的自然数 n_0,使得

$$f^{\circ n_0}(z_0)\subset\mathscr{C}\backslash V_f^*,$$

如果 $f^{\circ n_0}(z_0)$全是稳定点,则称 z_0 为稳定点. 首先定义 Fatou 集:

$$F(f)=\{z\in\mathscr{C}\backslash V_f\,|\,z\ \text{为稳定点}\},$$

再定义 Julia 集:

$$J(f)=\mathscr{C}\backslash\{F(f)\cup V_f\}.$$

这样,复平面$\mathscr{C}$按动力学性质分为三个互不相交的集合 V_f, $F(f)$ 和 $J(f)$. 一般来说,动力系统在 $F(f)$上是稳定的,而在 V_f 和 $J(f)$上是十分复杂的.

命题 10.2 $F(f)$是$\mathscr{C}\backslash V_f$ 上向前不变的开集;$J(f)$是$\mathscr{C}\backslash V_f$ 上向后不变的闭集.

§ 10.3.2 Fatou 集和 Julia 集的性质

上一段,我们按整代数体函数的动力学性质把$\mathscr{C}$作了分解: $\mathscr{C}=V_f\cup F(f)\cup J(f)$. 由于动力系统在 V_f 和 $J(f)$上具有较复杂的性态,所以探讨由 V_f 和 $J(f)$的结构和分布(即它们是以怎样的方式分割复平面$\mathscr{C}$的)是十分重要的. 以下我们将证明,对于给定的 f, V_f 和

$J(f)$，只可能有一个是复杂的，即单值复解析动力系统的动力二分性在这里基本上仍然保持. 事实上，我们有下述动力学分类定理.

定理 10.11 设 f 为 ν-值超越整代数体函数，$\nu \geqslant 2$，则 $J(f) \neq \varnothing$ 的充要条件为 f 平移共轭于 $z^{\frac{n}{\nu}}e^{h(z)}$，其中 n 为某一自然数，$(n, \nu)=1$，$h(z)$ 为某一非常数的整函数.

我们说两个整代数体函数 f 和 f^* 称为共轭的，如果存在整线性变换 $L(z)$，使得 $L^{-1} \circ f \circ L(z) = f^*(z)$. 特别地，如 $L(z)$ 是平移变换，则称 $f(z)$ 平移共轭于 $f^*(z)$. 这同定义 10.4 是完全一致的，只因为我们这里的 f 往往是超越的，所以要求 $L(z)$ 为整线性变换. 现在来证明定理 10.11.

证明 必要性：如果 $J(f) \neq \varnothing$，则存在 $z_0 \in J(f)$，由定义不妨设

$$z_0 \in \mathscr{C} \backslash V_f^*,$$

记 $U \subset \mathscr{C} \backslash V_f^*$ 为 z_0 的一个单连通邻域，从而 $\mathscr{F}(f, U)$ 不是正规族. 由 Montel 定理及 $\mathscr{C} \backslash V_f^*$ 的向前不变性知，V_f^* 是一个单点集，它为 f 的唯一的分支点. 通过平移共轭，可设该点为坐标原点.

以下证明 f 在 $z=0$ 处仅有一个代数函数元素. 如若不然，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处有 $m(\geqslant 2)$ 个函数元素：

$$f_1, f_2, \cdots, f_m,$$

记它们在 $z=0$ 处的分支重数依次为 $k_1, k_2, \cdots, k_m (k_1 + k_2 + \cdots + k_m = \nu)$，每个 f_j 在 $z=0$ 处有 Pusieux 级数表示：

$$f_j(z) = \alpha_j + \beta_{\tau_j} z^{\tau_j / k_j} + \cdots,$$

其中 $\alpha_j \in \mathscr{C}$，$\beta_{\tau_j} \in \mathscr{C} \backslash \{0\}$，$\tau_j \in \mathscr{N}$ 为常数. 由于 f 在 $\mathscr{C} \backslash \{0\}$ 上没有分支点，故可把

$$\alpha_j + \beta_{\tau_j} z^{\tau_j} + \cdots$$

解析开拓为 $\mathscr{C}$ 上的整函数，记为 $h_j(z)$，从而

$$h_j\left(z^{\frac{1}{k_j}}\right) \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

为 m 个整代数体函数，且在 $z=0$ 处每个 $h_j\left(z^{\frac{1}{k_j}}\right)$ 仅有一个函数元素 f_j. 记 $w=h_j\left(z^{\frac{1}{k_j}}\right)$ 的定义方程为

$$\varphi_j(z, w)=0,$$

易见 $w=f(z)$ 的定义方程

$$\varphi(z, w)=0$$

等价于

$$\varphi_1(z, w)\varphi_2(z, w)\cdots\varphi_m(z, w)=0.$$

这与 $\varphi(z, w)$的不可约性矛盾，故 $f(z)$在 $z=0$ 处仅有一个代数函数元素 $f_1(z)$.

从上讨论还知道

$$f(z)=h_1(z^{\frac{1}{\nu}}). \tag{10.8}$$

由 V_f^* 的向后不变性知

$$f^{-1}(0)=\varnothing \text{ 或者 } f^{-1}(0)=\{0\}.$$

以下区分两种情况：

1) 如果 $f^{-1}(0)=\varnothing$，则从(10.8)式易见

$$h_1(z)=\mathrm{e}^{\beta(z)}, \tag{10.9}$$

其中 $\beta(z)$为某一整函数. 记 $\varepsilon(\neq 1)$ 为 ν 次单位根，由于 f 不退化为整函数，故从(10.8)式和(10.9)式可见

$$\beta(z)-\beta(\varepsilon z)$$

为非常数整函数，从而，存在无穷多个 $b\in\mathscr{C}\backslash\{0\}$，使得

$$\mathrm{e}^{\beta(b)-\beta(\varepsilon b)}=1. \tag{10.10}$$

在 $z=b^\nu$ 的一个小邻域上，记$\left(z^{\frac{1}{\nu}}\right)_0$ 为 $z^{\frac{1}{\nu}}$的那个在 b^ν 处取值为 b 的单值解析分支，从(10.8)式和(10.9)式知，

$$\mathrm{e}^{\beta\left(\left(z^{\frac{1}{\nu}}\right)_0\right)},\ \mathrm{e}^{\beta\left(\varepsilon\left(z^{\frac{1}{\nu}}\right)_0\right)}$$

表示 $f(z)$的两个单值解析分支. 又从(10.10)式可见,这两个单值解析分支在 b^ν 处的值相等,故在 b^ν 处 $f(z)$有两个分支取同一值,这与 V_f^* 仅有一个单点矛盾,故只可能是 $f^{-1}(0)=\{0\}$.

2) 如果 $f^{-1}(0)=\{0\}$, 从(10.8)式易见

$$h_1(z)=z^n e^{\beta(z)}, \tag{10.11}$$

其中 n 为某一自然数,$\beta(z)$为某一整函数.

下面证明:存在非常数整函数 $h(z)$,使得

$$\beta(z)=h(z^\nu).$$

如若不然,则

$$\beta(z)-\beta(\varepsilon z)$$

为一非常数的整函数,故存在无穷个 $b\in\mathscr{C}\backslash\{0\}$, 使得

$$e^{\beta(z)-\beta(\varepsilon z)}=\varepsilon^n.$$

从此出发,类似于 1)中的讨论可知,b^ν 为 V_f 中的点,这导出矛盾,故从(10.8)式和(10.11)式得

$$f(z)=z^{\frac{n}{\nu}}e^{h(z)}.$$

再由定义方程的不可约性知, $(n,\nu)=1$. 必要性得证.

充分性:易见,如果 f 平移共轭于 $z^{\frac{n}{\nu}}e^{h(z)}$,则 $f(z)$一定具有如下形式:

$$f(z)=(z-a)^{\frac{n}{\nu}}e^{h^*(z)}+a,$$

其中 a 为某一复常数,$h^*(z)$为一非常数整函数,f 在穿孔复平面:

$$\mathscr{C}_0=\mathscr{C}\backslash\{0\}$$

上没有分支点,且$\mathscr{C}_0$ 在 f 下是完全不变的. 在覆盖映射:

$$w=a+\exp z$$

下,$\mathscr{C}$可视为$\mathscr{C}_0$ 的覆盖曲面. 取定 $\exp^{-1}$的一个分支,如下交换图所示,我们把 f"提升"为$\mathscr{C}$到$\mathscr{C}$的解析映射,易见,这样 f"分裂"为$\mathscr{C}$上的 ν

个整函数：

$$g_j(z) = \frac{n}{\nu}z + h^*(a + e^z) + \frac{2j\pi}{\nu}i \ (j = 1, 2, \cdots, \nu), \tag{10.12}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xrightarrow{g_1, g_2, \cdots, g_\nu} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle a+\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a+\exp} \\ \mathscr{C}_0 & \xrightarrow[f]{} & \mathscr{C}_0 \end{array}$$

从而，f 的迭代动力系统与整函数组

$$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_\nu\}$$

的随机迭代动力系统通过覆盖映射 $w = a + \exp z$ 紧密相联. 记

$$\Sigma_\nu = \prod_{k=1}^{\infty}\{1, 2, \cdots, \nu\},$$

任取 $\sigma = (j_1, j_2, \cdots, j_n, \cdots) \in \Sigma_\nu$, 定义

$$G_\sigma^1(z) = g_{j_1}(z), \ G_\sigma^{n+1}(z) = f_{j_{n+1}} \circ G_\sigma^n(z), \ n = 1, 2, \cdots,$$

如第九章所介绍的那样，G 的随机迭代动力系统的 Fatou 集和 Julia 集分别为

$$F(G) = \{z \in \mathscr{C} \mid 任取\ \sigma \in \Sigma_\nu, \{G_\sigma^n\}\ 在\ z\ 处正规\};$$

$$J(G) = \mathscr{C} \backslash \mathscr{F}(G).$$

易见

$$F(f) = \{a + \exp z \mid z \in F(G)\};$$

$$J(f) = \{a + \exp z \mid z \in J(G)\}.$$

由定理 9.10 可知，$J(G) \neq \varnothing$，故 $J(f)$非空. 证毕.

由定理 10.11 知，多值超越整代数体函数的动力系统只有以下三

种情况：

(i) $J(f) \neq \varnothing$，此时

$$V_f=\{a\},\ f(z)=(z-a)^{\frac{n}{\nu}}e^{h(z)}+a,\ \mathscr{C}=\{a\}\cup J(f)\cup F(f),$$

其中 $a \in \mathscr{C}$，n，$\nu \in \mathscr{N}$ 为常数，$(n, \nu) = 1$，$h(z)$ 为一非常数的整函数；

(ii) $J(f) = \varnothing$ 但 $V_f \neq \varnothing$，此时

$$\mathscr{C} = V_f \cup F(f);$$

(iii) $J(f) = \varnothing$，且 $F(f) = \varnothing$，此时

$$\mathscr{C} = V(f).$$

以下举例说明，上述三种情况均可能发生.

例 10.8 设 $w = f(z)$ 由不可约方程

$$w^2 - \lambda z e^z = 0$$

定义，其中 $\lambda \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$，易验证 λe^z 在正实轴上存在一个不动点，记为 x_0. 再记

$$D_0 = \{z \mid |z| < x_0\}\backslash\{0\},$$

任取 $z \in D_0$，记 z 在 $w = f(z)$ 下的像为 w_1，w_2，则

$$|w_j|^2 = \lambda |z| e^{\operatorname{Re} z} < \lambda x_0 e^{x_0} = x_0^2 \quad (j = 1, 2),$$

从而 $w_j \in D_0 (j = 1, 2)$，所以 $D_0 \subset F(f)$. 易见 $V_f = \{0\}$，又由定理 10.11 知 $J(f) \neq \varnothing$，故

$$\mathscr{C} = \{0\} \cup J(f) \cup F(f).$$

例 10.9 选取一个超越整函数 $g(z)$，使得 $0 \in J(g)$，且 g 有无穷多零点，取适当的自然数 $\nu > 1$，使

$$f(z) = [g(z^\nu)]^{\frac{1}{\nu}}$$

为一个 ν 值超越整代数体函数，由定理 10.11 可知，$J(f) = \varnothing$. 又由

于

$$f^{\circ k}(z) = [g^{\circ k}(z^{\nu})]^{\frac{1}{\nu}},\ k \in \mathscr{N},$$

且

$$J(g) = \text{Closure}\{g^{-\circ k}(0) \mid k = 0, 1, 2, \cdots\},$$

故

$$V_f = \{z \mid z^{\nu} \in J(g)\},$$

从而当 $J(g) \neq \mathscr{C}$ 时, $V_f \neq \varnothing$ 且 $F(f) \neq \varnothing$, 即 $\mathscr{C} = V_f \cup F(f)$; 当 $J(g) = \mathscr{C}$ 时, $\mathscr{C} = V_f$.

从定理 10.11 的证明可见,如果一个超越整代数体函数的 Julia 集出现,则它的许多动力学问题可转化为形如(10.12)式的有限个整函数的随机迭代动力学问题. 由于两者的转化是通过覆盖映射 $w = a + \exp z$ 实现的,故两者的周期轨道通过覆盖映射相对应,且对应的特征值相等. 这样,由定理 9.11,定理 9.12,定理 9.9,命题 9.5,定理 9.10 和定理 9.13 可得以下三个定理.

定理 10.12 设 f 为整代数体函数,如果 $J(f) \neq \varnothing$, 则 f 的排斥周期轨道和有理中性周期轨道属于 $J(f)$.

当 $J(f) = \varnothing$ 时,易见排斥周期轨道和有理中性周期轨道属于 V_f.

定理 10.13 设 f 为整代数体函数,如果 $J(f) \neq \varnothing$, 且 a 不是 f 的 Picard 例外值,则

$$J(f) \subset \{f^{-\circ n}(a) \mid n \in \mathscr{N}\}'.$$

如进一步设 $a \in J(f)$, 则

$$J(f) = \text{Closure}\{f^{-\circ n}(a) \mid n \in \mathscr{N}\}.$$

上述定理为用计算机绘制整代数体函数的 Julia 集提供了一种方法.

定理 10.14 设 f 为一超越整代数体函数,如果 $J(f) \neq \varnothing$, 则 $J(f)$为一无界完全集,且它是排斥周期轨道的闭包.

从上述三个定理可见,整代数体函数在其 Julia 集上呈现混沌

性态.

现在研究 Fatou 集的可能结构.

定理 10.15 设 f 为 $\nu(>1)$ 值整代数体函数, $J(f)\neq\varnothing$, 如果 D 是 $F(f)$ 的一个分支, 则仅有两种可能:

1) D 是单连通的;

2) D 是二连通的, 且 $\mathscr{C}\backslash D$ 的有界分支包含分支点.

证明 由定理 10.11 可知, f 仅有一个分支点, 记为 a, 且 $\mathscr{C}_0=\mathscr{C}\backslash\{0\}$ 是 f 的完全不变域. 以下只要证 $J(f)$ 的每个连通分支不全属于 $\mathscr{C}_0$ 的任一单连通紧子集即可.

如若不然, 则存在 $\mathscr{C}_0$ 上的简单闭曲线

$$\Gamma\subset F(f),$$

使 $\mathscr{C}\backslash\Gamma$ 的有界分支 $U\subset\mathscr{C}_0$, 且 U 中含 $J(f)$ 上的点, 故存在 U 上的 f 的分支迭代序列(即 $\mathscr{F}(f,U)$ 的子列) $\{H_n(z)\}$, $H_n(z)$ 在 $\overline{U}$ 上解析, 且 $\{H_n(z)\}$ 不存在收敛的子序列. 下面证明: 存在子列 $H_{n_k}(z)$ 在 Γ 上一致趋于 ∞. 否则, 由于 $\{H_n(z)\}$ 在 Γ 上正规, 故 $\{H_n(z)\}$ 在 Γ 上一致有界. 由最大模原则可知, $\{H_n(z)\}$ 在 $\overline{U}$ 上一致有界, 从而 $\{H_n(z)\}$ 在 U 上正规, 这是矛盾的, 从而, 存在子序列 $H_{n_k}(z)$ 在 Γ 上一致趋于 ∞. 记

$$L(z)=z+a,$$

由 $\mathscr{C}\backslash V_f$ 的向前不变性, 在 $L^{-1}(\overline{U})$ 上,

$$L^{-1}\circ H_{n_k}\circ L(z)\neq 0.$$

由最小模原则可知 $\{L^{-1}\circ H_{n_k}\circ L(z)\}$ 在 $L^{-1}(\overline{U})$ 上一致趋于 ∞, 这与 $\{H_n(z)\}$ 不存在一致收敛的子序列矛盾, 于是定理 10.15 得证. 证毕.

§10.3.3 关于 $J(f)$ 和 V_f 的分布

对于整代数体函数 $f(z)$, 由上一段知, 大量情况是 Julia 集 $J(f)$ 消失, 代之出现的是 V_f. 这里要指出的是, V_f 的结构和性态较 $J(f)$ 更为复杂. 以下研究 $J(f)$ 和 V_f 在复平面 $\mathscr{C}$ 上的分布, 并导出 $J(f)$ 和 V_f

的一个类似性质．为了叙述我们的结论，首先引入定义．

定义 10.12 设$\mathscr{A}$为$\mathscr{C}$的一个无界子集，$\theta \in \mathscr{R}$，如果任取$\varepsilon > 0$，

$$\{z \in \mathscr{C} \mid |\arg z - \theta| < \varepsilon\} \cap \mathscr{A}$$

均无界，则称θ为$\mathscr{A}$的一个渐近方向．

对于 Julia 集，我们有下述结果，它与整函数动力系统中的相应结果类似．

定理 10.16 设f为有穷级超越整代数体函数，$J(f) \neq \varnothing$，则$J(f)$有无穷个渐近方向．

关于V_f，有下述类似的结论．

定理 10.17 设f为有穷级超越整代数体函数，V_f无界，则V_f有无穷个渐近方向．

为了证明以上两个定理，我们需要以下几个引理．

引理 10.2[Mi] 设$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m \in [0, 2\pi]$为$m$个判别实数，则存在任意大的自然数$k$，使得

$$\cos k\theta_j > \frac{\sqrt{3}}{2} \ (j = 1, 2, \cdots, m). \qquad (10.13)$$

引理 10.3 设$g(z)$为整函数，$g(0) \neq 0$，其级$\rho < l$，$\{z_j\}$为其零点，则

$$\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)^{(l)}\Bigg|_{z=0} = -\, l!\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{z_j^{l+1}}. \qquad (10.14)$$

证明 首先由 Hadamard 因子分解定理，有

$$g(z) = e^{H(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)e^{Q_p(z/z_k)}, \qquad (10.15)$$

其中$H(z)$为某一次数不超过ρ的多项式，整数$p \leqslant \rho$，且

$$Q_p\left(\frac{z}{z_k}\right) = \frac{z}{z_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_k}\right)^p.$$

当$|z| < \min\limits_j(|z_j|)$时，由(10.15)式并结合级数的一致收敛性得

$$\log g(z)=H(z)-\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^n}{nz_k^n}\right),$$

逐项求导得

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=H'(z)-\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k^n}\right)z^{n-1},$$

即

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=H'(z)-\sum_{n=p}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k^{n+1}}\right)z^n.$$

比较上式两端便得(10.14)式. 证毕.

引理 10.4 设 $g(z)$为有穷级超越整函数,$\{w_n\}$为一无界复序列,则集合

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z\in\mathscr{C}\,|\,g(z)=w_n\}$$

有无穷个渐近方向.

证明 设 $g(z)$的级为 $\rho<\infty$, 不妨设

$$0<|w_1|<|w_2|<\cdots<|w_n|<\cdots,$$

否则代替$\{w_n\}$考虑其某一子序列即可. 记 $g(z)=w_n$ 的根为$\{a_{nk}\}$,且

$$0\leqslant|a_{n1}|\leqslant|a_{n2}|\leqslant\cdots\leqslant|a_{nk}|\leqslant\cdots,$$

故 $E=\{a_{nk}\,|\,n,\ k\in\mathscr{N}\}$. 假如 E 仅有有穷个渐近方向,记为

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m,\ 0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_m<2\pi,$$

则由引理 10.2,存在正整数 $p>\rho+1$, 使得

$$\cos(p\theta_k)>\frac{\sqrt{3}}{2}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

又记

$$E_1=\{a_{nk}^p\,|\,n,\ k\in\mathscr{N}\},$$

那么从上述讨论知,E_1 至多有 m 个渐近方向,且全在$\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)$上.

对上述选定的 p,由于 $g(z)$是超越的,故存在常数 $c\in\mathscr{C}$, 使得

$g^{(p)}(c) \neq 0$. 作

$$h(z) = g(z + c),$$

可见 $h(z)$与 $g(z)$具有相同的级且 $h^{(p)}(0) \neq 0$，并且易见 $h(z) = w_n$ 的根为

$$\{a_{nk} - c \mid n, k \in \mathscr{N}\}.$$

记 $c_{nk} = a_{nk} - c$，不失一般性，不妨仍设

$$0 < |c_{n1}| \leqslant |c_{n2}| \leqslant \cdots \leqslant |c_{nk}| \leqslant \cdots,$$

易见 $E_2 = \{c_{nk} \mid n, k \in \mathscr{N}\}$ 与 E 具有完全相同的渐近方向，故从上述讨论知，$E_3 = \{(c_{nk})^p \mid n, k \in \mathscr{N}\}$ 的渐近方向全在$\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$上，因此存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，$(c_{nk})^m$ 全在角域：

$$\left\{z \in \mathscr{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}\right\}$$

上. 对 $h(z)-w_n$ 应用引理 10.3，有

$$\left[\frac{h'(z)}{h(z) - w_n}\right]^{(p+q-1)}\Bigg|_{z=0} = -(p + q - 1)! \sum_{k=1}^{\infty} (c_{nk})^{-(p+q)},$$

$$(q = 0, 1, 2, \cdots).$$

令 $n \to \infty$得

$$h^{(p+q)}(0) = (p + q - 1)! \lim_{n \to \infty}\left[w_n \sum_{k=1}^{\infty} (c_{nk})^{-(p+q)}\right],$$

故当 $q \geqslant 1$ 时，

$$\frac{h^{(p+q)}(0)}{h^{(p)}(0)} = \frac{(p + q - 1)!}{(p - 1)!} \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (c_{nk})^{-(p+q)}}{\sum_{k=1}^{\infty} (c_{nk})^{-p}}. \tag{10.16}$$

由于当 $n > N$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(c_{nk})^{-(p+q)}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|^{-(p+q)} \leqslant |c_{n1}|^{-q}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|^{-p}, \tag{10.17}$$

且

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(c_{nk})^{-p}\right| &\geqslant \left|\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(c_{nk})^{-p}\right| \\ &> \left|\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|^{-p}\cos\frac{\pi}{6}\right| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|^{-p},\end{aligned}$$

故从(10.16)式、(10.17)式和上式得

$$|h^{(p+q)}(0)| \leqslant \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!}|h^{(p)}(0)|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}\,|c_{n1}|^{q}} \tag{10.18}$$

又 $w_n\to\infty$，且 $h(c_{n1}) = w_n$，从而 $c_{n_1}\to\infty$，故从(10.18)式知，

$$h^{(p+q)}(0) = 0 \quad (q = 1, 2, \cdots).$$

这说明 $h(z)$为多项式，这与 $g(z)$的超越性矛盾，从而引理 10.4 得证. 证毕.

接下来先证明定理 10.16.

证明 任取一串无界复数

$$\{b_j\} \subset J(f),$$

首先由定理 10.11 知，

$$f(z) = (z-a)^{\frac{n}{\nu}}e^{h(z)} + a, \tag{10.19}$$

其中 $a \in \mathscr{C}$，$n, \nu \in \mathscr{N}$，$(n, \nu) = 1$，$h(z)$ 为某一整函数. 由 Julia 集的向后不变性和(10.19)式得

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\{z \in \mathscr{C} \mid (z-a)^n e^{\nu h(z)} = w_j\} \subset J(f),$$

其中 $w_j=(b_j-a)^\nu$. 从此及引理 10.4 知,$J(f)$有无穷多渐近方向. 证毕.

再证明定理 10.17.

证明 由文献[HX]知,f 的不可约定义方程可设为

$$\varphi(z,w)=w^\nu+A_{\nu-1}(z)w^{\nu-1}+\cdots+A_1(z)w+A_0(z)=0, \tag{10.20}$$

其中 $A_j(z)(j=0, 1, \cdots, \nu-1)$ 均为级不超过 ρ(f 的级)的整函数,且至少有一个是超越的.

假如 V_f 仅有有限个渐近方向,记为

$$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m (0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_m<2\pi),$$

由引理 10.2 可知,可取任意大的 $k>\rho$, 使(10.13)式成立,从而,存在 $M>0$, 任取 $w\in V_f$, 只要 $|w|>M$, 便有

$$\cos(\arg w^k)>\frac{1}{2}. \tag{10.21}$$

取一串 $w_n\in V_f$, $w_n\to\infty(n\to\infty)$, 由 V_f 的向后不变性知,$\varphi(z, w_n)$ 的零点$\{a_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$全在 V_f 中. 以下无妨设

$$|a_{n1}|\leqslant|a_{n2}|\leqslant\cdots\leqslant|a_{nj}|\leqslant\cdots,$$

取 w_n,使$|w_n|$充分大,便有

$$|a_{nj}|>M\ (j=1, 2, 3, \cdots). \tag{10.22}$$

又由引理 10.3 可知,任取自然数 $l>\rho$, 有

$$\left.\left(\frac{\varphi'(z, w_n)}{\varphi(z, w_n)}\right)^{(l-1)}\right|_{z=0}=-(l-1)!\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_j}^l}. \tag{10.23}$$

从(10.20)式易见

$$A_{\nu-1}^{(l)}(z)=\lim_{n\to\infty}w_n\left(\frac{\varphi'(z, w_n)}{\varphi(z, w_n)}\right)^{(l-1)}.$$

从此及(10.23)式得

$$A_{\nu-1}^{(l)}(0)=-(l-1)!\lim_{n\to\infty}w_n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n_j}^{l}},\qquad(10.24)$$

故当 $l>k$ 时,由(10.21)式、(10.22)式和(10.24)式得

$$\begin{aligned}|A_{\nu-1}^{(l)}(0)|&\leqslant(l-1)!\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|w_n|}{|a_{n1}|^{l-k}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|a_{nj}|^{k}}\\&=(l-1)!\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|w_n|}{|a_{n1}|^{l-k}}\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a_{nj}^{k}}\right)\frac{1}{\cos(\arg a_{nj}^{k})}\\&\leqslant 2(l-1)!\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|a_{n1}|}\left|w_n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_{nj}^{k}}\right|\\&=2|A_{\nu-1}^{(k)}(0)|\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|a_{n1}|}.\end{aligned}$$

因 $a_{n1}\to\infty(n\to\infty)$,故

$$A_{\nu-1}^{(l)}(0)=0\quad(l=k+1,k+2,\cdots),$$

即 $A_{\nu-1}(z)$为多项式.

一般地,任取 $t\in\{2,3,\cdots,\nu\}$, 如果对 $j\leqslant t-1$ 已经证明了 $A_{\nu-j}(z)$全为多项式,由于

$$\begin{aligned}\log\varphi(z,w_n)&=\nu\log w_n+\log\left(1+\frac{A_{\nu-1}(z)}{w_n}+\frac{A_{\nu-2}(z)}{w_n^2}+\cdots+\frac{A_0(z)}{w_n^{\nu}}\right)\\&=\nu\log w_n+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{A_{\nu-1}(z)}{w_n}+\cdots+\frac{A_0(z)}{w_n^{\nu}}\right)^{j}\\&=\nu\log w_n+\frac{A_{\nu-1}(z)}{w_n}+\sum_{j=2}^{\nu}\frac{A_{\nu-j}(z)+P_j(A_{\nu-1},\cdots,A_{\nu-j+1})}{w_n^{j}}\\&\quad+O\left(\frac{1}{w_n^{\nu+1}}\right)\quad(n\to\infty),\end{aligned}\qquad(10.25)$$

其中 $P_j(A_{\nu-1},\cdots,A_{\nu-j+1})$为有限个形如

$$A_{\nu-j_1}(z)A_{\nu-j_2}(z)\cdots A_{\nu-j_p}(z)$$

$(1\leqslant j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_p\leqslant j-1,\ j_1+j_2+\cdots+j_p=j)$的项的线性组合，且由于

$$A_{\nu-j}(z)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ t-1)$$

全为多项式，故

$$P_j(A_{\nu-1},\cdots,A_{\nu-j+1})\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

全为多项式，因此从(10. 25)式得：当 k 充分大时，

$$\lim_{n\to\infty} w_n^t[\log\varphi(z,\ w_n)]^{(k)}=A_{\nu-t}^{(k)}(z). \qquad (10.26)$$

因为当 $k\geqslant 2t+1$ 时，

$$\begin{aligned}\left|w_n^t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(a_{nj})^k}\right| &\leqslant |w_n|^t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|a_{nj}|^k}\\ &\leqslant\frac{1}{|a_{n1}|}|w_n|^t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|a_{nj}|^{k-1}}\\ &\leqslant\frac{1}{|a_{n1}|}|w_n|^t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|a_{nj}|^{2t}}\\ &\leqslant\frac{1}{|a_{n1}|}\left(|w_n|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|a_{nj}|^2}\right)^t,\end{aligned}$$

从此及(10. 24)式得：当 k 充分大时，

$$\lim_{n\to\infty} w_n^t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(a_{nj})^k}=0. \qquad (10.27)$$

又从(10. 20)式易见：当 k 充分大时，

$$A_{\nu-t}^{(k)}(z)=\lim_{n\to\infty} w_n^t\left(\frac{\varphi'(z,\ w_n)}{\varphi(z,\ w_n)}\right)^{(k-1)},$$

从此及(10. 24)式、(10. 27)式便可导出 $A_{\nu-t}(z)$也为多项式.

这就证明了 $A_{\nu-j}(z)\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu)$ 全为多项式，从而 $f(z)$退

化为代数函数，这与 f 的超越性矛盾. 证毕.

定理 10.17 中要求 f 是有穷级的，一个自然的课题与无穷级的情况有关. 然而，对无穷级整代数体函数没有定理 10.17 的结论. 事实上，我们有以下定理.

定理 10.18 存在无穷级整代数体函数 $f(z)$，使得 V_f 仅有有穷个渐近方向.

证明 文献[Ba]构造了一个无穷级整函数 $g(z)$，它具有如下性质：

1) 存在正实数 h 和 a，记

$$H=\{z\in\mathscr{C}\,|\,\mathrm{R_e}z>-a,\,|\mathrm{I_m}z|<h\},$$

$$G=\mathscr{C}\backslash H,$$

则

$$g(G)\subset G.$$

2) g 的 Julia 集 $J(g)\subset H$.

现取一点 $\alpha\in J(g)$, $\mathrm{Re}\alpha>0$ 且 α 不是 g 的 Picard 例外值. 记

$$H_1=\{z-\alpha\,|\,z\in H\},\ G_1=\mathscr{C}\backslash H_1,$$

以及

$$g_1(z)=g(z+\alpha)-\alpha,$$

由 2)易见

$$0\in J(g_1)\subset H_1.$$

由 1)知，

$$g_1(G_1)\subset G_1.$$

作无穷级整代数体函数

$$f(z)=[g_1(z^\nu)]^{\frac{1}{\nu}},$$

记 H^* 为 H_1 在 $w=z^\nu$ 下的逆像，显然，H^* 仅有 ν 个渐近方向. 由 $J(g_1)$ 的完全不变性知道，f 的分支点全在 H^* 上. 又 α 不是 g 的 Picard 例外值，故 f 有无穷个分支点. 由定理 10.11 知，$J(f)=\varnothing$. 任取 $z\in\mathscr{C}\backslash H^*$，由于

$$f^{\cdot k}(z) = [g_1^{\cdot k}(z^\nu)]^{\frac{1}{\nu}} \subset \mathscr{C}\backslash H^*,$$

故 z 的前向轨道不会与分支点相遇,所以

$$V_f^* \subset H^*,$$

即 V_f 仅有有穷个渐近方向. 证毕.

参考文献

[Bu] S. Bullet, Dynamics of quadratic correspondences. *Nonlinearity* 1 (1) (1988), 27-50.

[BOP] S. Bullet, A. Sbaldestin and I. Percival, An iterated implicit complex map. *Physica D* 19 (1986), 290-300.

[MR] H. F. Munzner and H. -M. Rasch, Iterated algebaic functions and functional equations. *International J. of Bifurcation and Chaos*, 1 (4) (1991), 803-822.

[HX] 何育赞,萧修治,代数体函数与常微分方程,科学出版社,1988.

[Mi] J. Miles, On entire functions of infinite order with radially distributed zeros. *Pacific J. Math.* 81 (1979), 131-156.

[Ba] I. N. Baker, Set of non-normality in iteration theory. *J. London Math. Soc.*, 40 (1965), 449-502.

[QR] Jian-Yong Qiao and Fu-Yao Ren, On the iterations of entire algebric functions. *Science in China*, Ser. *A* 37 (4) (1994), 422-431.

第十一章　多复变量全纯映射的动力学

与单复变解析动力系统相比，多复变全纯映射的动力学是一个较新的课题，其发展还很不完善. 相应于单复变的双曲 Riemann 面和抛物型 Riemann 面，多复变动力学也沿两个方向发展：有界区域上的和整个$\mathscr{C}^N$上的. 关于有界区域上全纯自映射的迭代理论，早在 60 年代初，M. Herré 就在$\mathscr{C}^N$中单位超球上作了系统的讨论，近年来又有人作了许多研究，而且得到了较为完整的结果. 对$\mathscr{C}^N$中整体的全纯自映射的迭代，从 1969 年 Hénon 研究 Hénon 映射开始，20 多年来，研究对象主要局限于$\mathscr{C}^2$的多项式自同构，其结果也已趋于完备. 对$\mathscr{C}^N$中一般的全纯自映射的迭代，目前只有极少一点结果，这其中一个重要原因是单复变迭代理论的许多重要工具在多复变里不再成立，如关于正规族的有关定则等. 虽然如此，但迭代本身作为一种工具，在多复变的发展中却发挥了重要作用. 如产生于 30 年代的著名的 Cartan 唯一性定理，以及 Fatou-Bieberbach 区域的构造等都可以用迭代方法而简单地给出. 多复变迭代理论还在天体力学、遗传学、数值分析等领域被广泛运用. 本章就这一方面的主要成就作一介绍.

§11.1　$\mathscr{C}^N$中全纯自映射迭代的一般理论

本节我们对$\mathscr{C}^N$中的一般全纯自映射及多项式映射作一般性的讨论[ZR2].

§11.1.1　定义与初等性质

设$f:\mathscr{C}^N\to\mathscr{C}^N$是全纯映射，记作$f\in H(\mathscr{C}^N,\mathscr{C}^N)$. 关于$f$的$n$次

迭代 f^n，以及有关轨道、正向轨道、逆向轨道、周期点、不动点等的定义与复平面$\mathscr{C}$上的函数相同，不再列出.

设 $a \in \mathscr{C}^N$ 是 f 的周期为 p 的周期点，f 在 a 点的特征矩阵 A 定义为 f^p 在 a 点的复 Jacobi 矩阵 $A = Df^p(a)$.

定义 11.1 设 a 是 f 的周期点，A 是 f 在 a 点的特征矩阵，记 λ 为 A 的特征值的最大模，如果 $\lambda < 1(\lambda = 0)$，$\lambda > 1$ 或 $\lambda = 1$，则相应地称 a 是 f 的吸引(超吸引)、排斥或中性周期点.

定义 11.2 设 $f \in H(\mathscr{C}^N, \mathscr{C}^N)$，$a \in \mathscr{C}^N$，称 a 是 f 的稳定点(或正规点，或 Fatou 点)，如果存在 a 的邻域 U，使 $\{f^n|_U\}$ 是正规族，即 $\{f^n|_U\}$ 的任一子列都包含一子列 $\{f^{n_j}|_U\}$，$\{f^{n_j}|_U\}$ 内闭一致收敛或紧致发散(即 $\forall\ K_1 \subset\subset U$，$K_2 \subset\subset \mathscr{C}^N$，都存在 $m = m(K_1, K_2)$，使得当 $j > m$ 时，恒有 $f^{n_j}(K_1) \cap K_2 = \varnothing$). f 的稳定点的全体记作 $F = F(f)$，称为 f 的稳定集或 Fatou 集，它的余集 $J = J(f) = \mathscr{C}^N \backslash F$ 称为 f 的不稳定集或 Julia 集.

由定义容易看出 F 是开集，J 是闭集. 这里以及本节以后部分均假定所讨论的 $f \in H(\mathscr{C}^N, \mathscr{C}^N)$ 是满射和开映射，以使我们的讨论有意义. 下面讨论这类映射的 Fatou 集和 Julia 集的初等性质.

命题 11.1 Fatou 集 F 和 Julia 集 J 都是完全不变的，即 $f^{-1}(F) = f(F) = F$，$f^{-1}(J) = f(J) = J$.

命题 11.2 $F(f^n) = F(f)$，$J(f^n) = J(f)$，$n = 1, 2, \cdots$.

以上两命题的证明与单变量时类似，留给读者自证.

当 f 不是开的和满的时，命题 11.1 不成立，而且当 f 满而不开时，读者可以证明：$f^{-1}(F) \subset F \subset f(F)$，$f(J) \subset J \subset f^{-1}(J)$.

命题 11.3 f 的排斥周期点属于 J；吸引(超吸引)周期点属于 F，而且对吸引(超吸引)周期点 a，存在区域 Ω，使得 $f^{np}(z) \to a, \forall\ z \in \Omega$，其中 p 是 a 的周期.

证明 据命题 11.2，只须证明不动点的情况即可.

设 a 是 f 的排斥不动点，$f(a) = a$，$Df(a) = A$，A 的最大特征值为 λ，$|\lambda| > 1$. 如果 $a \notin J$，即 $a \in F$，则存在 a 的邻域 U，使得 $\{f^n|_U\}$ 是正规族，即有子列 $\{f^{n_k}\}$ 在 U 上内闭一致收敛或紧致发散. 由

$f^{n_k}(a)=a$ 知道 $\{f^{n_k}\}$ 不是紧致发散的. 设 $f^{n_k}\to g$, 则 $g: U\mapsto \mathscr{C}^N$ 是全纯映射, 而且 $Df^{n_k}(a)=A^{n_k}\to Dg(a)$, 注意到 λ^{n_k} 是 A^{n_k} 的特征值, $\lambda^{n_k}\to\infty$, 这便与 $A^{n_k}\to Dg(0)$ 矛盾, 故 $a\in J$.

要证明命题 11.3 的第二部分, 我们需要以下两个引理. 为了简化记号, 本章中凡遇到一个 N 阶方阵作用到 $\mathscr{C}^N$ 中的向量上时, 均视该向量为列向量, 在其他情形为行向量.

引理 11.1 设 A 是 $N\times N$ 上三角阵, λ 是 A 的特征值的最大模, $f(z)=Az$, 如果 $\lambda<1$, 则对任何 $r>\lambda$, 存在多圆柱 $D^N(\beta)$, 使得 $f(D^N(\beta))\subset D^N(r\beta)$, 其中 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)$, $\beta_N<\beta_{N-1}<\cdots<\beta_1=K\beta_N$, K 是一个常数, 而 $D^N(\beta)=\{z\in\mathscr{C}^N \mid |z_j|<\beta_j,\ j=1,2,\cdots,N\}$.

证明 设

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N}\\ 0 & \lambda_2 & a_{23} & \cdots & a_{2N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N\end{bmatrix},$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}|\lambda_j|<1$, $a=\max\limits_{1\leqslant i,\ j\leqslant N}\{|a_{ij}|,1\}\geqslant 1$, 取 $\varepsilon>0$, 使得 $\varepsilon+\lambda\leqslant r$, 取定 $\beta_1>0$, 令 $\beta_j=\dfrac{\varepsilon}{Na}\beta_{j-1}$, $j=2,3,\cdots,N$, 则对所有这样的 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_N)$, 可以验证本引理结论成立, 细节留给读者.

引理 11.2 设 $\Omega\subset\mathscr{C}^N$, $f\in H(\Omega,\mathscr{C}^N)$, $f(a)=a$, $a\in\Omega$, 如果 $Df(a)$ 的最大特征值模小于 1, 则存在 a 的邻域 V, 使得 $f(V)\subset V'\subset\subset V$.

证明 不失一般性, 可设 $0\in\Omega$, $a=0$, 由 Shur 定理, 存在酉矩阵 Q, 使 $Q^{-1}Df(0)Q\equiv M$ 是一上三角阵.

令 $U=Q^{-1}(\Omega)$, $g(z)=Q^{-1}\circ f\circ Q(z)$, 则 $g\in H(U,\mathscr{C}^N)$, 且 $Dg(0)=M$, $g(0)=0$, 因此 g 在 0 点的齐次展式可写成:

$$g(z)=Mz+G(z),$$

其中 $G(z)$ 只包含次数大于 1 的项，故可写为 $G(z) = \sum_{j,k=1}^{N} z_j z_k g_{jk}(z)$，这里，$g_{jk}$ 在 0 点附近解析. 现在由引理 11.1 可知，对给定的 $1 > r > \lambda$，存在 β，使得 $M: D^N(\beta) \mapsto D^N(r\beta)$. 另一方面，由于 $G(z) = \sum_{j,k=1}^{N} z_j z_k g_{jk}(z)$，因此对给定的球 $B(0, R) \subset\subset U$，存在 $c > 0$ 使得在 $B(0,R)$ 上有 $|G(z)| < c|z|^2$. 取 $\varepsilon = \dfrac{1-r}{2}$，并取 β 充分小使得 $\beta_N < \dfrac{\varepsilon}{CNK^2}$，$D^N(\beta) \subset B(0, R)$（由引理 11.1 的证明知道这是可以做到的），对此容易验证 $g(D^N(\beta)) \subset D^N\left(\dfrac{1+r}{2}\beta\right) \subset\subset D^N(\beta)$. 取 $V = Q(D^N(\beta))$，$V' = Q\left(D^N\left(\dfrac{1+r}{2}\beta\right)\right)$，即可验证本引理成立. 证毕.

命题 11.3 第二部分的证明：设 a 是 f 的吸引或超吸引不动点，不失一般性，可设 $a = 0$，由引理 11.1 和引理 11.2 的证明知道，对 $g = Q^{-1} \circ f \circ Q$，有 $g^n(D^N(\beta)) \subset D^N\left(\left(\dfrac{1+r}{2}\right)^n \beta\right)$，后者收缩于一点，故 $\forall\, z \in D^N(\beta)$，$g^n(z) \to 0$，从而在 $V = Q(D^N(\beta))$ 上有 $f^n = Q \circ g^n \circ Q^{-1}$ 收敛于 0. 证毕.

§ 11.1.2 局部线性化定理

如果 a 是 f 的周期为 p 的周期点，则它是 f^p 的不动点. 据命题 11.2，要讨论 f 在 a 点的性质，只须讨论 a 是不动点的情形即可. 经简单的线性变换，可不妨假定 $a = 0$，此时 f 在该点的展开式为

$$f(z) = Az + \sum_{k \geq 2} f_k(z),$$

其中 $A = Df(0)$，$f_k(z)$ 是 z 的 k 次齐次多项式.

定理 11.1 设 $f \in H(\mathscr{C}^N, \mathscr{C}^N)$，$z = 0$ 是 f 的吸引不动点，$Df(0) = A$，如果 A 的最大特征值模为 λ，$A\overline{A}'$ 的最小特征值模 $\rho < 1$ 满足 $\sqrt{\rho} > \lambda^2$，则 f 在 0 点附近可线性化，即存在 0 的邻域 U 及 U 到自身内的一个双全纯映射 φ，$\varphi(0) = 0$，$D\varphi(0) = I$（单位矩阵），使得

$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z)$ 是线性映射 Az.

证明 由于 $\sqrt{\rho} > \lambda^2$，因此存在 $r > \lambda$，使得 $\sqrt{\rho} > r^2$. 仔细研究引理 11.1 和引理 11.2 的证明，在两次所取的 ε 中(记作 ε_1, ε_2)，可以取得充分小以使得 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \lambda \leqslant r$. 如同引理 11.2 中一样，令 $g = Q^{-1} \circ f \circ Q$，取 β，使得 $g^m(D^N(\beta)) \subset D^N(r^m\beta)$，$m = 1, 2, \cdots$. 显然，只须证明 g 在 0 点可线性化即可.

现在据定理条件知，$M \equiv Dg(0) = Q^{-1}AQ$ 的最大特征值模为 $\lambda < 1$，而 $M\overline{M}' = Q^{-1}A\overline{A}'Q$ 的最小特征值为 $\rho < 1$，$\sqrt{\rho} > \lambda^2$. 由于 $g(z) - Mz$ 中只包含次数$\geqslant 2$ 的项，如同引理 11.2 中的证明一样，可设在 $D^N(\beta)$内有 $|g(z) - Mz| \leqslant c|z|^2$，从而

$$|g^{m+1}(z) - Mg^m(z)| \leqslant c|g^m(z)|^2 \leqslant cr^{2m}\beta_1^2.$$

在 $D^N(\beta)$内定义

$$\varphi_m(z) = (M^{-1})^m g^m(z),$$

则 $\varphi_m(0) = 0$，$D\varphi_m(0) = (M^{-1})^m(Dg(0))^m = I$，而且 $\varphi_m \circ g(z) = (M^{-1})^m g^m \circ g(z) = M\varphi_{m+1}(z)$.

以下证明 φ_m 在 $D^N(\beta)$内内闭一致收敛. 考虑

$$\begin{aligned}|\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)| &= |(M^{-1})^{m+1}g^{m+1}(z) - (M^{-1})^m g^m(z)| \\ &= |(M^{-1})^{m+1}[g^{m+1}(z) - Mg^m(z)]| \\ &\leqslant \| M^{-1} \|^{m+1} |g^{m+1}(z) - Mg^m(z)| \\ &\leqslant \left(\sqrt{\rho^{-1}}\right)^{m+1} \cdot cr^{2m}\beta_1^2 \\ &= c\frac{\beta_1^2}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{r^2}{\sqrt{\rho}}\right)^m,\end{aligned}$$

因此，对 $\forall\, p \in \mathcal{N}$，有

$$|\varphi_{m+p}(z) - \varphi_m(z)| \leqslant \sum_{j=m}^{\infty} |\varphi_{j+1}(z) - \varphi_j(z)|$$

$$\leqslant \frac{c\beta_1^2}{\sqrt{\rho}} \sum_{j=m}^{\infty} \left(\frac{r^2}{\sqrt{\rho}} \right)^j$$

$$\leqslant \frac{c\beta_1^2}{\sqrt{\rho} - r^2} \left(\frac{r^2}{\sqrt{\rho}} \right)^m.$$

由于 $\sqrt{\rho} > r^2$，上式说明$\{\varphi_m\}$在 $D^N(\beta)$上是一致 Cauchy 序列，从而内闭一致收敛于一全纯映射 φ，φ 满足 $\varphi(0) = 0$，$D\varphi(0) = I$，且 $\varphi \circ g(z) = M\varphi(z)$，而且由 $M\overline{M}'$的最小特征值 ρ 满足 $\sqrt{\rho} > \lambda^2$，故有 $\det M \neq 0$. 因此可取 β 充分小，以使得 g 在 $D^N(\beta)$内单叶，从而所有 φ_m 单叶，故据 $D\varphi(0) = I$ 知道 φ 在 $D^N(\beta)$内单叶. 以上讨论表明：$\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(z) = Mz$. 证毕.

值得注意的是，定理 11.1 中的条件 $\sqrt{\rho} > \lambda^2$ 是不可少的. 例如，取 $f(z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda^2 z_2 + z_1^2)$，$0 < \lambda < 1$，则 $f \in H(\mathscr{C}^2, \mathscr{C}^2)$，$f(0) = 0$，且 $Df(0) = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^2) \equiv A$，$A$ 的最大特征值为 $\lambda < 1$，$A\overline{A}'$的最小特征值 $\rho = \lambda^4$，$\sqrt{\rho} \not> \lambda^2$. 如果 f 在 0 点可线性化为 $Az = (\lambda z_1, \lambda^2 z_2)$，那么由于过原点的解析曲面中由 f 保持不变者只有 $z_1 = 0$，而 A 能保持所有形如 $z_2 = cz_1^2$ 的解析曲面不变（为什么？请读者自己验证），这是一个矛盾，故 f 在原点不可线性化.

§11.1.3 多项式映射的 Fatou 分支

假定 $f \in H(\mathscr{C}^N, \mathscr{C}^N)$ 是一般的多项式映射，类似一维时的记号，定义 f 的填充 Julia 集 K^+为

$$K^+ = \{z \in \mathscr{C}^N \mid \{f^n(z)\}\text{是有界序列}\},$$

容易看出：K^+是一个完全不变的闭集，而且 $\mathrm{int}K^+ \subset F$. 关于 $\mathrm{int}K^+$的各分支的性质，我们有下述定理 11.2.

定理 11.2 设 $f \in H(\mathscr{C}^N, \mathscr{C}^N)$ 是多项式映射，则 $\mathrm{int}K^+$的任一连通分支是 Runge 域.

证明 由于 Runge 开集的任一连通分支是 Runge 域，故只须证明 $\mathrm{int}K^+$是 Runge 开集即可，即要证明

$$\forall \ S \subset\subset \mathrm{int}K^+ \Rightarrow \hat{S} \subset\subset \mathrm{int}K^+, \qquad (11.1)$$

其中 $\hat{S} = \{z \in \mathscr{C}^N \mid |p(z)| \leqslant \sup_{w \in S} |p(w)|, p \text{ 是任何多项式}\}$.

实际上,(11.1)式是以下三件事实的直接推论:

1) $\forall \ S \subset\subset \mathrm{int}K^+$, 则 $\hat{S} \subset K^+$;

2) $\forall \ S \subset\subset \mathrm{int}K^+$, 则 $\exists \ \varepsilon > 0$, 使得

$$S_\varepsilon = \{z \in \mathscr{C}^N \mid \mathrm{dist}(S, z) \leqslant \varepsilon\} \subset\subset \mathrm{int}K^+ \ ;$$

3) 对 S, $S_\varepsilon \subset\subset \mathrm{int}K^+$, 有 $(\hat{S})_\varepsilon \subset \hat{S}_\varepsilon$.

其中 1), 2)是显然的. 对于 3),我们有: $\forall \ z \in (\hat{S})_\varepsilon$, $\exists \ u \in \hat{S}$, $v \in \mathscr{C}^N$, $|\nu| \leqslant \varepsilon$,使得 $z = u + v$, 于是对任一多项式 P 有:

$$|p(z)| = |p(u+v)| \leqslant \sup_{w \in S} |p(w+v)| \leqslant \sup_{w \in S_\varepsilon} |p(w)|,$$

故 $z \in \hat{S}_\varepsilon$,3) 得证.

据 1), 2), 3)得 $(\hat{S})_\varepsilon \subset \hat{S}_\varepsilon \subset K^+$, 从而 $\hat{S} \subset\subset \mathrm{int}K^+$. 证毕.

§ 11.1.4 一些例子

本段通过几个例子来说明一维迭代理论的一些重要结果在高维时不再成立. 为简单起见,所有的例子均在$\mathscr{C}^2$ 上给出,在一般的$\mathscr{C}^N$ 上也可以类似地构造.

例 11.1 一维时,Julia 集等于排斥周期点的闭包. 在高维时,设 $f(z) = (z_1^2, 2z_2)$, 则 f 是开满映射,而且 $J(f) = \overline{\Delta} \times \{0\} = \{(z_1, 0) \mid |z_1| \leqslant 1\}$. 但是,易知 f 的所有周期点位于 $S = \{(z_1, 0) \mid |z_1| = 1$ 或 $|z_1| = 0\}$ 上,显然 $\overline{S} \neq J(f)$.

例 11.2 一维时,Julia 集非空. 而在高维时,对任意次数的多项式,都有 Julia 集为空集的情况. 比如设 $f(z) = \left(rz_1(1+z_2^m), \frac{1}{2}z_2\right)$,其中 $0<r\leqslant 1$, $m\geqslant 1$. 易知 f 是开满映射,$f^n(z) = \left(r^n z_1 \prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{2^{km}}z_2^m\right),\right.$

$\left.\frac{1}{2^n}z_2\right)$. 记 $p(z_2)=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{km}}z_2^m\right)$，这一无穷乘积在$\mathscr{C}$上内闭一致收敛，因此，当 $r=1$ 时，$f^n(z)\to g(z)\equiv(z_1p(z_2),0)$；当 $r<1$ 时，$f^n(z)\to 0$，两种情形均在$\mathscr{C}^2$上内闭一致收敛，故 $J(f)=\varnothing$.

上例中 f 是一个自同构，考虑到自同构本身在一维时就是平凡的，我们提出：当 $f\in H(\mathscr{C}^N,\mathscr{C}^N)$，$\deg f\geqslant 2$，$f$ 不是自同构时，是否必有 $J(f)\neq\varnothing$？这样的反例还没见到过.

例 11.3 一维时，对 Julia 集上任一点 a，其大轨道的闭包等于 Julia 集，而且对 a 的任一邻域 U，U 的正向轨道之并的闭包等于$\hat{\mathscr{C}}$. 在高维时，这两个结论均不成立. 还以例 11.1 中的 f 为例，$f(z)=(z_1^2, 2z_2)$，$J(f)=\overline{\Delta}\times\{0\}$，

1) $(0,0)\in J(f)$，$(0,0)\in D^2(0,1)=\{(z_1,z_2)\,|\,|z_j|<1, j=1,2\}$，但是 $\bigcup_{k=0}^{\infty}f^k(D^2(0,1))=\overline{\Delta}\times\hat{\mathscr{C}}\neq\hat{\mathscr{C}}^2$；

2) $(0,0)$的大轨道只含一点，其闭包不等于 $J(f)$.

例 11.4 一维时，f 的任一直接吸引盆内至少必存在一个临界点. 在高维时，设 $f(z)=(\lambda z_1, \lambda^2z_2+z_1^2)$，$0<|\lambda|<1$，则 $z=0$ 是 f 的吸引不动点. 实际上，由于 $f^k(z)=(\lambda^kz_1, \lambda^{2k}z_2+k\lambda^{2k-2}z_1^2)$，故 $F(f)=\Omega(f)=\mathscr{C}^2=\{z\,|\,f^k(z)\to 0\}$，但因 $\det Df(z)=\lambda^3\neq 0$，故 f 在$\mathscr{C}^2$上没有临界点.

本例中 f 是一个自同构. 若 f 不是自同构，结论如何？尚未发现反例.

§11.2 Denjoy-Wolff 定理

在单复变中，著名的 Denjoy-Wolff 定理刻画了单位圆盘 Δ 的解析自映射的迭代序列的渐近性质，从而根据 Riemann 映照定理，它给出了复平面上所有边界多于一点的单连通区域上同一问题的刻画. 由于高维区域的复杂性，即使对$\mathscr{C}^N$中的有界区域，也不能简单地给出一个代表区域. 事实上，按全纯等价分类时它可以分为不可数多类. 因此，多

复变类似问题的研究依赖于各种不同的区域.本节将这一方面的主要成就作一介绍.

§11.2.1 强拟凸域的情形

$\mathscr{C}^N$ 中的单位超球是单位圆盘的最自然的推广，而强拟凸域又具有单位超球的一些好的性质.人们在给出单位超球上的 Denjoy-Wolff 定理后，一个自然的问题就是研究强拟凸域的情形.下面的定理完整地回答了这一问题，它是到目前为止所研究的最弱的区域.

定理 11.3[ZRQ] 设 $\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$ 是具有 C^2 边界的强拟凸域，$f \in H(\Omega,\Omega)$，则以下两者之一成立：

1）整个迭代序列 $\{f^n\}$ 内闭一致收敛于一点 $\zeta \in \overline{\Omega}$；

2）存在 Ω 的一个全纯收缩 R_f，及子列 $\{f^{n_j}\}$，使 $\{f^{n_j}\}$ 内闭一致收敛于 R_f，$V = R_f(\Omega)$ 是 Ω 的子流形，而且对 $\{f^n\}$ 的任一收敛子序列极限 g，必有表示 $g = T \circ R_f$，其中 $T: V \mapsto V$ 是一双全纯映射.

定理中的全纯收缩 R_f 是指满足 $R_f^2 = R_f$ 的全纯自映射.

定理的证明要用到由 M. Abate 在 1988 年引入的极限球面概念[A]以及有关强拟凸域的一些性质.

定义 11.3 设 $\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$ 是一区域，$a \in \Omega$，$x \in \partial\Omega$，$R > 0$，定义以 x 为中心、以 a 为极点、以 R 为半径的小极限球面(small horosphere) $E_a(x, R)$和大极限球面(big horosphere) $F_a(x, R)$分别为：

$$E_a(x, R) = \left\{z \in \Omega \mid \limsup_{w \to x}[K_\Omega(z, w) - K_\Omega(a, w)] < \frac{1}{2}\log R\right\},$$

$$F_a(x, R) = \left\{z \in \Omega \mid \liminf_{w \to x}[K_\Omega(z, w) - K_\Omega(a, w)] < \frac{1}{2}\log R\right\}, \tag{11.2}$$

其中 $K_\Omega(\circ, \circ)$是 Ω 上的 Kobayashi 距离.

我们要用到的关于极限球面的一个关键性质是如下的引理 11.3. 它是 M. Abate 在 1988 年证明的，证明较长，此处略去.有兴趣的读者可参看文献[A].

引理 11.3 设$\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$是一个$C^2$强拟凸域,则对$\forall\ a \in \Omega,\ x \in \partial\Omega,\ R > 0$,有

$$\overline{F_a(x,\ R)} \cap \partial\Omega = \{x\}. \tag{11.3}$$

为证明定理 11.3,还需建立如下一些引理.

引理 11.4 设$\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$是一个$C^2$强拟凸域,$f \in H(\Omega,\ \Omega)$,如果$\{f^m\}$的任一收敛子列都收敛到边界点,则存在唯一$x \in \partial\Omega$,使得$f^m$在$\Omega$上内闭一致收敛于$x$.

证明 给定$a \in \Omega$,由于$\{f^m(z)\}$的所有极限点均位于$\partial\Omega$上,故有

$$\lim_{m\to\infty} K_\Omega(a,\ f^m(a)) = \infty. \tag{11.4}$$

根据实数列的性质,由(11.4),不难选出一子列$\{m_j\}$,$m_j \to \infty$,使得

$$K_\Omega(a,\ f^{m_j}(a)) < K_\Omega(a,\ f^{m_j+k}(a)),\ \forall\ k \in \mathcal{N}. \tag{11.5}$$

由于Ω是强拟凸域,因而它是绷紧(taut)区域,故$\{f^m\}$是正规族.若有必要,再选子列,可不妨设$\{f^{m_j}\}$是收敛的.设$f^{m_j}(z) \to x \in \partial\Omega$,则有

$$\lim_{j\to\infty} f^{m_j}(a) = x,$$

$$\lim_{j\to\infty} f^{m_j+k}(a) = \lim_{j\to\infty} f^{m_j}(f^k(a)) = x,\ \forall\ k = 1,\ 2,\ \cdots. \tag{11.6}$$

我们断言:$f^k(E_a(x,\ R)) \subset F_a(x,\ R),\ \forall\ k = 1,\ 2,\ \cdots.$ $\quad$ (11.7)

事实上,$\forall\ z \in E_a(x,R)$,由于全纯映射在 Kobayashi 距离下是非扩张的,故由(11.5)式及(11.6)式得:

$$\begin{aligned}
&\liminf_{w\to x}[K_\Omega(f^k(z),w) - K_\Omega(a,w)] \\
\leqslant &\liminf_{j\to\infty}[K_\Omega(f^k(z),\ f^{m_j+k}(a)) - K_\Omega(a,\ f^{m_j+k}(a))] \\
\leqslant &\liminf_{j\to\infty}[K_\Omega(z,\ f^{m_j}(a)) - K_\Omega(a,f^{m_j+k}(a))]
\end{aligned}$$

$$\leqslant \liminf_{j\to\infty}[K_\Omega(z,\ f^{m_j}(a)) - K_\Omega(a, f^{m_j}(a))]$$

$$\leqslant \limsup_{w\to x}[K_\Omega(z,\ w) - K_\Omega(a, w)]$$

$$< \frac{1}{2}\log R.$$

故 $f^k(z) \in F_a(x,\ R)$，断言得证.

最后，任取$\{f^m\}$的一收敛子列$\{f^{n_j}\}$，设 $f^{n_j} \to x_1 \in \partial\Omega$，则(11.7)式表明，$x_1 \in \overline{F_a(x,\ R)}$，从而由(11.3)式知道 $x_1 = x$，因此 x 是唯一的，且对 $\forall\ z \in \Omega$，$f^m(z) \to x$，其内闭一致收敛性可由$\{f^m\}$是正规族得到.证毕.

引理 11.5 设 $\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$ 是 C^2 强拟凸域，$f \in H(\Omega,\ \overline{\Omega})$，则要么 $f \in H(\Omega,\ \Omega)$，要么 $f(z) \equiv \zeta \in \partial\Omega$.

证明 只须证明，若 $\exists\ a \in \Omega$ 使得 $f(a) = \zeta \in \partial\Omega$，则 $f(z) \equiv \zeta$. 我们熟知，C^2 强拟凸域的每个边界点都是峰点，因此，若记 $A(\Omega)$为在 Ω 全纯并连续到边界的函数之全体，则对 $\zeta = f(a) \in \partial\Omega$，存在 $g \in A(\Omega)$，使得 $g(\zeta) = 1$，$|g(z)| < 1$，$\forall\ z \in \overline{\Omega}\setminus\{\zeta\}$.

考虑全纯函数 $h = g \circ f$，则 $h(a) = g(f(a)) = 1$，而且 $|h(z)| \leqslant 1$，$\forall\ z \in \overline{\Omega}$，故由最大模原理导出 $h(z) \equiv 1$，即 $g(f(z)) \equiv 1$，由此导出 $f(z) \equiv \zeta$. 证毕.

下面的引理 11.6 要在引理 11.7 的证明中用到. 引理 11.6 的证明较长，读者可参看文献[Ca].

引理 11.6 设 M 是一个有限完全有界的度量空间(即 M 的每一有界子集都是完全有界的)，并设 $f: M \mapsto M$ 是一个在所述度量下非扩张的映射. 如果 $\exists\ a \in M$，子列$\{m_j\}$，$m_j \to \infty$，使得$\{f^{m_j}(a)\}$是有界序列，则 $\forall\ z \in M^1$，$\{f^m(z)\}$ 是有界序列.

引理 11.7 设 $\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$ 是 C^2 强拟凸域，$f \in H(\Omega,\ \Omega)$，如果$\{f^m\}$有一个极限映射属于 $H(\Omega,\ \Omega)$，则它的所有极限映射属于 $H(\Omega,\ \Omega)$.

证明 设 $\exists\ m_j \to \infty$，$f^{m_j} \to g \in H(\Omega,\ \Omega)$，则对给定的 $a \in \Omega$，$\{f^{m_j}(a)\}$是 Ω 内有界序列. 注意到 f 在 Kobayashi 度量下是非扩张映

射，若能证明 Ω 是有限完全有界的，则引理 11.6 表明：$\forall z \in \Omega$，$\{f^m(z)\}$ 是有界序列，从而$\{f^m\}$的所有极限映射属于 $H(\Omega, \Omega)$. 以下证明 Ω 是有限完全有界的. 首先，在强拟凸域上 Kobayashi 度量是完备的，故在 Kobayashi 度量下，任一球 $B(z, r)$，$z \in \Omega$，$r > 0$，其 $\overline{B(z, r)}$是紧的，因而 Ω 的任何有界子集的闭包是紧的，从而更是完全有界的. 证毕.

现在，我们来证明定理 11.3.

证明 记 $\Gamma(f)$ 为$\{f^m\}$在紧开拓扑下在 $H(\Omega, \mathscr{C}^N)$中的闭包，$\Gamma'(f)$为$\{f^m\}$的极限映射的集合. 定理的证明分两种情形.

情形 1：如果$\{f^m\}$的任一收敛子列都收敛于常值映射.

(i) 若所有收敛子列都收敛到边界点，则引理 11.4 表明整个序列 $f^m \to x \in \partial\Omega$.

(ii) 若存在子列$\{f^{m_j}\}$，$f^{m_j} \to z_0 \in \Omega$，则

$$f(z_0) = \lim_{j\to\infty} f(f^{m_j}(z)) = \lim_{j\to\infty} f^{m_j}(f(z)) = z_0,$$

即 $f(z_0) = z_0$，于是对$\{f^m\}$的其他任一收敛子列$\{f^{n_j}\}$，有

$$\lim_{j\to\infty} f^{n_j}(z) = \lim_{j\to\infty} f^{n_j}(z_0) = z_0,$$

故 $f^m \to z_0$.

总之，我们得到 $f^m \to \zeta \in \overline{\Omega}$. 收敛的内闭一致性由$\{f^m\}$的正规性得到.

情形 2：存在收敛子列$\{f^{m_j}\}$，$f^{m_j} \to g \in H(\Omega, \overline{\Omega})$，且 g 不为常值.

由引理 11.5 知 $g \in H(\Omega, \Omega)$，再由引理 11.7 知 $\Gamma(f) \subset H(\Omega, \Omega)$，因此 $\Gamma(f)$是一个紧致 Abel 半群. 由半群理论可知，存在唯一的一个幂等元 $R_f \in \Gamma(f)$，$R_f = R_f^2$，即 R_f 是 Ω 的一个全纯收缩，$V = R_f(\Omega) = F_{ix}(R_f)$ 是一个子流形.

现在固定$\{m_j\}$及 g，$f^{m_j} \mapsto g$. 若有必要，再取子列，不妨设

$$k_j = m_{j+1} - m_j \to \infty,$$

$$l_j = k_j - m_j = m_{j+1} - 2m_j \to \infty,$$

进一步还可设$\{f^{k_j}\}$与$\{f^{l_j}\}$均收敛. 令

$$f^{k_j} \to R \in \Gamma'(f) \subset H(\Omega, \Omega),$$

$$f^{l_j} \to h \in \Gamma'(f) \subset H(\Omega, \Omega),$$

由 $f^{m_{j+1}} = f^{m_j} \circ f^{k_j} = f^{k_j} \circ f^{m_j}$ 取极限得

$$g = g \circ R = R \circ g. \tag{11.8}$$

以同样的理由运用于 $f^{k_j} = f^{l_j} \circ f^{m_j} = f^{m_j} \circ f^{l_j}$, 得

$$R = g \circ h = h \circ g. \tag{11.9}$$

由(11.8)式、(11.9)式得

$$R^2 = h \circ g \circ h \circ g = h \circ R \circ g = h \circ g = R,$$

故 $R \in \Gamma(f)$ 是一个幂等元. 由幂等元的唯一性得 $R = R_f$, 且 $f^{k_j} \to R_f$, 而且(11.8)式可以重写为

$$g = g \circ R_f.$$

以下只须证明 $T = g|_V : V \mapsto V$ 是双全纯映射即可. 实际上, 由 $R_f^2 = R_f$ 知 $R_f|_V = id$, 而且由于 $h \in \Gamma'(f)$, 因此在上述讨论中用 h 代替 g 又得

$$h = h \circ R_f = R_f \circ h. \tag{11.10}$$

现在(11.8)式表明 $g(V) = R_f(g(V)) \subset R(\Omega) = V$, 故 $g \in H(V, V)$. 另外, (11.10)式表明 $h \in H(V, V)$. 最后(11.9)式给出 $h \circ g|_V = g \circ h|_V = R_f|_V = id$, 故 $g|_V \equiv T: V \mapsto V$ 是双全纯映射. 证毕.

在经典的 Denjoy-Wolff 定理中(单位圆盘上), 本定理的结论 2)对应于 $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$ 的情形. 但在$\mathscr{C}^N$ 中的 C^2 强拟凸域上, 结论 2)并不能保证 $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$. 事实上有下面的例子.

例 11.5 在$\mathscr{C}^N$ 上定义实值函数 ρ 为

$$\rho(z) = \|z\|^2 - 2|z_1| + 1 - r^2,$$

其中 $0 < r < 1/2$ 是一确定数. 令

$$\Omega = \{z \in \mathscr{C}^N \mid \rho(z) < 0\},$$

容易从定义证明 Ω 是一个有界的具有光滑边界的强拟凸域.

令

$$f(z) = \left(-z_1, \frac{1}{2}z_2, \cdots, \frac{1}{2}z_n\right),$$

则 $f \in H(\Omega, \Omega)$，且 $f^{2k}(z) \to R_f(z) = (z_1, 0, \cdots, 0)$，但 $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$.

如果 Ω 是几何凸域，则定理 11.3 的形式与经典 Denjoy-Wolff 定理相同，这将在下一段中予以介绍.

§11.2.2 凸区域的情形

由于 $\mathscr{C}^N$ 中具有 C^2 边界的凸区域是强拟凸域，故利用定理 11.3 可得如下的定理 11.4.

定理 11.4 设 $\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$ 是 C^2 凸区域，$f \in H(\Omega, \Omega)$，则

1) 如果 $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$，则存在 $x \in \partial\Omega$，使 $f^m(z) \to x$ 在 Ω 内闭一致收敛；

2) 如果 $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$，则存在子列 $\{f^{m_j}\}$ 及全纯收缩 R_f，使 $f^{m_j} \to R_f$，$V = R_f(\Omega)$ 是 Ω 的子流形，而且对 $\{f^m\}$ 的任一收敛子列 $\{f^{k_j}\}$，存在双全纯映射 $T: V \mapsto V$，使 $f^{k_j} \to g = T \circ R_f$.

证明 显然只须证明对 C^2 凸区域，定理 11.3 中的结论 2)必保证 $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$ 即可.

由定理 11.3 之结论 2)，则存在子列 $\{f^{m_j}\}$，$f^{m_j} \to R_f \in H(\Omega, \Omega)$，故对给定的 $a \in \Omega$，$\{f^{m_j}(a)\}$ 是 Ω 中有界子列，从而，用引理 11.7 中的证明方法及引理 11.6 的结论知道，$\{f^m(a)\}$ 是 Ω 中的有界序列. 在 Ω 中定义

$$r(z) = \limsup_{j\to\infty} K_\Omega(f^j(a), z), \ z \in \Omega.$$

由于 K_Ω 满足三角不等式，容易知道 $r(z)$ 是 Ω 上的连续函数，而且由 K_Ω 的性质知道，当 $z \to \partial\Omega$ 时 $r(z) \to \infty$. 再令

$$r = \inf_{z\in\Omega} r(z),\ A = \{z \in \Omega \mid r(z) = r\},$$

则由 $r(z)$的连续性以及 $r(z)\to\infty$ ($z\to\partial\Omega$ 时)知道,A 是非空闭集,而且由 Ω 是凸集知道,Ω 内任一点为心的 Kobayashi 度量下的球是凸集,从而 A 是凸集. 最后根据 f 的 Kobayashi 度量的非扩张性知道 $f(A) \subset A$,因此,f 是有界非空闭凸集 A 的全纯自映射,由 Brouwer 不动点定理可知,f 在 A 上有不动点,从而 $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$. 证毕.

§11.3 有界域上全纯自映射的随机迭代

本节考虑有界域上全纯自映射簇的随机迭代问题,设 $\Omega \subset \mathscr{C}^N$ 是有界区域,$\mathscr{F} \subset H(\Omega, \Omega)$,给定 $\{f_n\} \subset \mathscr{F}$,考虑内迭代

$$G_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n,\ n = 1, 2, \cdots$$

与外迭代

$$F_n = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1,\ n = 1, 2, \cdots,$$

要解决的问题是:在 $\mathscr{F}$ 满足什么条件时 G_n 或 F_n 在 Ω 内内闭一致收敛于一点[ZR1]?

§11.3.1 压缩映射的随机迭代

定理 11.5 设 $\Omega \subset \mathscr{C}^N$ 是有界区域,$E \subset\subset \Omega$,且

$$\mathscr{F} = \{f \in H(\Omega, \Omega) \mid f(\Omega) \subset E\},$$

则对任何序列 $\{f_n\} \subset \mathscr{F}$,存在 $a \in \Omega$,使得 $G_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 a.

$\mathscr{F}$ 中的映射通常称为压缩映射.

证明 记 $\varepsilon = \mathrm{dist}(E, \partial\Omega)$,$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$,其中 M 是 Ω 的直径. 对固定的 $z \in \Omega$,定义

$$g_n(w) \equiv f_n(w) + \delta(f_n(w) - f_n(z)),\quad \forall\, w \in \Omega,$$

注意到

$$|\delta(f_n(w) - f_n(z))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}M = \frac{\varepsilon}{2},$$

故有 $g_n \in H(\Omega, \Omega)$.

设 $F_K: \Omega \times \mathscr{C}^N \mapsto \mathscr{R}$ 为 Ω 上的 Kobayashi 度量的无穷小形式，由于全纯映射在 Kobayashi 度量下是非扩张的，故有

$$F_K(g_n(z), Dg_n(z)\zeta) \leqslant F_K(z, \zeta), \forall \zeta \in \mathscr{C}^N. \tag{11.11}$$

注意到

$$g_n(z) = f_n(z), Dg_n(z) = (1+\delta)Df_n(z),$$

故(11.11)式可重写为

$$F_K(f_n(z), Df_n(z)\zeta) \leqslant \frac{1}{1+\delta}F_K(z, \zeta), \zeta \in \mathscr{C}^N, z \in \Omega. \tag{11.12}$$

回忆 Ω 上的 Kobayashi 距离为

$$K_\Omega(z, w) = \inf_\gamma \int_0^1 F_K(\gamma(t), \gamma'(t))\mathrm{d}t, \forall z, w \in \Omega, \tag{11.13}$$

其中下确界取遍 Ω 中的 C^1 曲线 γ：其端点为 $z = \gamma(0)$, $w = \gamma(1)$.

现在对任一这样的曲线 γ, $f_n \circ \gamma$ 是以 $f_n(z)$, $f_n(w)$ 为端点的相应曲线，因此(11.12)式、(11.13)式给出：

$$F_K(f_n(\gamma(t)), Df_n(\gamma(t))\gamma'(t)) \leqslant \frac{1}{1+\delta}F_K(\gamma(t), \gamma'(t)),$$

即

$$F_K(f_n(\gamma(t)), [f \circ \gamma(t)]') \leqslant \frac{1}{1+\delta}F_K(\gamma(t), \gamma'(t)). \tag{11.14}$$

在(11.14)式两端关于 $t \in [0, 1]$ 取积分，并利用(11.13)式得：

$$K_\Omega(f_n(z), f_n(w)) \leqslant \inf_\gamma \int_0^1 F_K(f_n \circ \gamma(t), [f_n \circ \gamma(t)]')\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \inf_{\gamma}\int_0^1 \frac{1}{1+\delta} F_K(\gamma(t), \gamma'(t))\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1+\delta} K_\Omega(z, w), \ \forall \ z, w \in \Omega,$$

因此，对任何自然数 n, p，下列两式成立：

$$K_\Omega(G_n(z), G_n(w)) \leqslant \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{n-1} K_\Omega(f_n(z), f_n(w))$$

$$\leqslant A\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{n-1}, \ \forall \ z, w \in \Omega, \tag{11.15}$$

$$K_\Omega(G_n(z), G_{n+p}(z)) \leqslant \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{n-1} K_\Omega(f_n(z), f_n \circ \cdots \circ f_{n+p}(z))$$

$$\leqslant A\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{n-1}, \tag{11.16}$$

其中 $A = \sup\limits_{z, w \in E} K_\Omega(z, w) < \infty$.

因为 Ω 是有界的，所以存在 $R > 0$，使 $\forall \ z \in E$，有

$$\Omega \subset B(z,R) = \{w \in \mathscr{C}^N \mid |w - z| < R\}.$$

我们熟知：

$$K_\Omega(z, w) \geqslant K_{B(z, R)}(z, w) = \omega\left(0, \frac{|w-z|}{R}\right) \geqslant \frac{|w-z|}{R}, \ \forall \ z, w \in \Omega, \tag{11.17}$$

其中 ω 是单位圆盘 $\Delta \subset \mathscr{C}$ 上的 Poincaré 度量.

现在从(11.15)式至(11.17)式得：

$$|G_n(z) - G_n(w)| \leqslant AR\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{n-1}, \ \forall \ z, w \in \Omega, \tag{11.18}$$

$$|G_n(z) - G_{n+p}(z)| \leqslant AR\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{n-1}, \ \forall \ z \in \Omega, \tag{11.19}$$

根据(11.19)式得$\{G_n(z)\}$是一个一致 Cauchy 序列,所以它收敛于某点 $z_0 \in \overline{E}$,而(11.18)式又表明 $G_n(w)$与 $G_n(z)$极限相同,故有

$$G_n(w) \to z_0, \ \forall \ w \in \Omega,$$

而且收敛是一致的. 证毕.

但是,关于 $F_n = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$,上述定理是不成立的. 例如,取 $\Omega = B$ 为$\mathscr{C}^N$ 中单位超球, $f_{2n}(z) = \frac{1}{5}z$, $f_{2n-1}(z) = \frac{1}{5}\left(z - \frac{3}{5}e_1\right)$,其中 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathscr{C}^N$,则 F_n 在 Ω 内任何点均不收敛.

§11.3.2 凸区域上的随机迭代

在下述定理中,我们对 N 阶方阵 A,用 $\| A \|$ 表示其算子范数,即 $\| A \| = \max\limits_{|z| \leqslant 1} |Az|$.

定理 11.6 设 $\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$ 为凸区域, $\mathscr{F} \subset H(\Omega,\Omega)$ 满足以下条件:

1) 任一 $f \in \mathscr{F}$ 均可连续扩张到$\overline{\Omega}$,而且 $\| \mathrm{D}f(z) \| \leqslant 1, \ \forall \ z \in \Omega$;

2) 存在 $z_0 \in \Omega$,使

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \| \mathrm{D}f(z_0) \| < 1, \qquad (11.20)$$

则对任何序列 $\{f_n\} \in \mathscr{F}, G_n = f_1 \circ \cdots \circ f_n$,我们有 $G_n(z) \to a \in \overline{\Omega}$.

证明 下面我们分四步来证明这一定理.

首先,我们证明:

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \| Df(z) \| < 1, \ \forall \ z \in \Omega. \qquad (11.21)$$

事实上,如果存在$a \in \Omega$,使 $\sup\limits_{f \in \mathscr{F}} \| \mathrm{D}f(a) \| = 1$,则存在 $f_n \in \mathscr{F}$, $f_n \to f \in H(\Omega, \Omega)$,使得 $\| Df(a) \| = 1$,因此,存在点 $P \in \mathscr{C}^N$, $|P| = 1$,使得 $|\mathrm{D}f(a)P| = |P| = 1$.

考虑全纯映射 $g(z) = Df(z)P \equiv (g_1(z), \cdots, g_N(z))$, $z \in \Omega$. 显然 $g \in H(\Omega, \overline{B})$,由 $|g(a)| = 1$ 知道 $g(a) \equiv b \in \partial B$,令

$$h(z) = \langle g(z), b\rangle = \sum_{j=1}^{N} g_j(z)\,\bar{b}_j,$$

则 h 是 Ω 上的全纯函数,而且

$$|h(z)| \leqslant |g(z)||b| = |g(z)| \leqslant 1, \ |h(a)| = |b|^2 = 1,$$

因此由最大模原理得到 $h(z) \equiv h(a) = 1$. 这又表明 $g(z) \equiv b$, 即 $|\mathrm{D}f(z)P| \equiv |b| = 1$,从而 $\|\mathrm{D}f(z)\| \geqslant 1$. 特别有, $\|\mathrm{D}f(z_0)\| \geqslant 1$,这与条件 2)矛盾,于是(11.21)式得证.

第二步,我们证明:

对任何 $f \in \mathscr{F}$, z, $w \in \overline{\Omega}$, 我们有

$$|f(z) - f(w)| < |z - w|. \qquad (11.22)$$

事实上,若 z, $w \in \Omega$, 那么以 z, w 为端点的闭直线段 L 是 Ω 的紧子集. 因此,由(11.21)式知存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\|\mathrm{D}f(z)\| < 1 - \varepsilon, \ z \in L.$$

由 $\mathrm{D}f$ 的定义,对 $\forall\, a \in L$, 有

$$\lim_{u\to a} \frac{|f(u) - f(a) - \mathrm{D}f(a)(u-a)|}{|u-a|} = 0.$$

故存在 $\delta_a > 0$, 使得当 $u \in B(a, \delta_a)$ 时,成立下式:

$$\begin{aligned} |f(u) - f(a)| &\leqslant (1+\varepsilon)|\mathrm{D}f(a)(u-a)| \\ &\leqslant (1+\varepsilon)\,\|\mathrm{D}f(a)\|\,|u-a| \\ &< (1-\varepsilon^2)|u-a|. \end{aligned}$$

显然,L 由所有这样的球 $B(a, \delta_a)$, $a \in L$ 所覆盖. 由 L 的紧性可知,存在 L 上有限多个点,按从 z 到 w 的顺序排为 $a_1 = z$, a_2, $\cdots$, a_{n-1}, $a_n = w$, 使得

$$|f(a_j) - f(a_{j+1})| < (1-\varepsilon^2)|a_j - a_{j+1}|, \ j = 1, 2, \cdots, n-1,$$

由此导出:

$$
\begin{aligned}
|f(z)-f(w)| &= \left|\sum_{j=1}^{n-1} f(a_j)-f(a_{j+1})\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}(1-\varepsilon^2)|a_j-a_{j+1}| \\
&= (1-\varepsilon^2)|z-w| < |z-w|.
\end{aligned}
$$

其次,如果 $z\in\partial\Omega$ 或 $w\in\partial\Omega$, 或 $z, w\in\partial\Omega$, 则可取两点 $a, b\in\Omega\cap L$. 设 a, b 是沿 L 从 z 到 w 的方向上,由前面的讨论可知,存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$
|f(a)-f(b)| < (1-\varepsilon^2)|a-b|. \tag{11.23}
$$

由于 f 在$\overline{\Omega}$连续,故存在 $a_1\in[z, a]$, $b_1\in[b, w]$, 使得

$$
\begin{aligned}
|f(z)-f(a_1)| &< \frac{\varepsilon^2}{2}|a-b|, \\
|f(w)-f(b_1)| &< \frac{\varepsilon^2}{2}|a-b|,
\end{aligned} \tag{11.24}
$$

而前述讨论同样保证:

$$
\begin{aligned}
|f(a_1)-f(a)| &< |a-a_1|, \\
|f(b)-f(b_1)| &< |b-b_1|.
\end{aligned} \tag{11.25}
$$

结合(11.23)式至(11.25)式得到

$$
\begin{aligned}
|f(z)-f(w)| &\leqslant |f(z)-f(a_1)| + |f(a_1)-f(a)| \\
&\quad + |f(a)-f(b)| + |f(b)-f(b_1)| \\
&\quad + |f(b_1)-f(w)| \\
&< |a_1-a| + |a-b| + |b-b_1| \\
&= |a_1-b_1| < |z-w|,
\end{aligned}
$$

故(11.22)式成立.

第三步,设 $d=\operatorname{diam}(\overline{\Omega})$, ω 是 $\mathscr{F}$ 的等度连续模,即

$$\omega(r)=\sup\{|f(z)-f(w)|\,|\,f\in\mathscr{F},\ z,\ w\in\overline{\Omega},\ |z-w|\leqslant r\},$$
$$r\in[0,\ d],$$

我们有：

(i) ω 在$[0,\ d]$上是上升的；

(ii) $\omega(r_1+r_2)\leqslant\omega(r_1)+\omega(r_2)$, $r_1,\ r_2\geqslant 0$, $r_1+r_2\leqslant d$；

(iii) $\omega(r)\leqslant r$, $0\leqslant r\leqslant d$；

(iv) ω 在$[0,\ d]$上连续；

(v) $\omega(r)<r$, $0<r\leqslant d$.

事实上,(i)由 ω 的定义给出,(iii)是(11.22)式的推论,现在证明(ii).对任意给定的 $z,\ w\in\overline{\Omega}$, $|z-w|\leqslant r_1+r_2$,由$\overline{\Omega}$的凸性推知,存在 $u\in\overline{\Omega}$,使得 $|z-u|\leqslant r_1$, $|u-w|\leqslant r_2$,因此由(11.22)式得

$$|f(z)-f(w)|\leqslant|f(z)-f(u)|+|f(u)-f(w)|$$
$$\leqslant\omega(r_1)+\omega(r_2),\ \forall\ f\in\mathscr{F}.$$

由此即得(ii).

其次,由(i)、(ii)、(iii)知道,若 $r_2\geqslant r_1$,则

$$|\omega(r_2)-\omega(r_1)|=\omega(r_2)-\omega(r_1)$$
$$\leqslant\omega(r_2-r_1)$$
$$\leqslant r_2-r_1=|r_2-r_1|,$$

故 ω 在$[0,\ d]$上连续,(iv)得证.

最后证明(v).由于 Ω 是凸域,因而是绷紧域,从而 $H(\Omega,\ \Omega)$是正规族,更有 $\mathscr{F}$ 是正规族.进一步,由假设条件 1)与条件 2)以及 $\mathscr{F}$ 的等度连续性知道 $\mathscr{F}$ 是闭的.要证(v),采用反证法.假如不然,存在 $r\in(0,\ d]$ 使 $\omega(r)=r$,则存在 $z_n,\ w_n\in\overline{\Omega}$, $f_n\in\mathscr{F}$, $|z_n-w_n|\leqslant r$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(z_n)-f_n(w_n)|=r$. 若有必要,选取子列,可不妨设$\{z_n\}$, $\{w_n\}$和$\{f_n\}$均收敛.设$\{z_n\}$收敛于 z, $\{w_n\}$收敛于 w, $z,\ w\in\overline{\Omega}$, $\{f_n\}$收敛于 $f\in\mathscr{F}$,则有 $|f(z)-f(w)|=r\geqslant|z-w|$,这与(11.22)式

矛盾，故(v)成立.

现在我们来证明定理的结论.

首先，对任何紧集 $E \subset \overline{\Omega}$，任何 $f \in \mathscr{F}$，我们有

$$\mathrm{diam} f(E) \leqslant \omega(\mathrm{diam} E),$$

因此

$$\mathrm{diam} G_n(\overline{\Omega}) \leqslant \omega^n(\mathrm{diam}\, \overline{\Omega}) = \omega^n(d).$$

由 ω 的连续性及 $\omega(r) < r$，容易看出：

$$\lim_{n\to\infty} \omega^n(r) = 0,\ \forall\ r \in [0, d].$$

这说明 $\mathrm{diam} G_n(\overline{\Omega}) \to 0$，因此 $G_n \to a \in \overline{\Omega}$ 在$\overline{\Omega}$上一致成立. 证毕.

§11.3.3 一般绷紧区域上的随机迭代

在前面两段里我们看到，在一定条件下内迭代 $G_n \to a \in \overline{\Omega}$，但外迭代 F_n 却不收敛. 本段将对一般绷紧(taut)区域讨论某种限定性质的映射序列$\{f_n\}$所构成的内迭代 G_n 与外迭代 F_n 收敛于一点的充分必要条件.

定理 11.7 设 $\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$ 是绷紧(taut)区域，$f \in H(\Omega, \Omega)$，那么当且仅当 f 在 Ω 内有一吸性不动点 $a \in \Omega$ 时，对任何满足 f_n 收敛于 f 的序列 $\{f_n\} \subset H(\Omega, \Omega)$，有 $G_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ 收敛于 $b \in \Omega$.

证明 "仅当"部分是显然的，现只要证明定理中"当"的部分.

设 f 有吸性不动点 a，$f(a) = a$，$Df(a)$的所有特征值模都小于1，由引理 11.2，则存在 a 的邻域 V，使得

$$f(V) \subset V' \subset\subset V.$$

另一方面，由于 f_n 收敛于 f，可取 $M > 0$ 充分大及一区域 $V'' \subset\subset V$，使得当 $n > M$ 时恒有

$$f_n(V) \subset V'' \subset\subset V.$$

应用定理 11.5 于 $G_{M,n} \equiv f_{M+1} \circ f_{M+2} \circ \cdots \circ f_n$，则在 V 上有

$$G_{M,n}(z) \to c \in V,\ \forall\ z \in V,$$

从而由 $G_n = f_1 \circ \cdots \circ f_M \circ f_{M+1} \circ \cdots \circ f_n = G_M \circ G_{M,n}$ 知道，对任意给定的 $z \in V$，有

$$G_n(z) \to G_M(c) \equiv b \in \Omega.$$

最后，由于 Ω 是绷紧(taut)区域，故$\{G_n\}$在 Ω 上是正规族. 令 G 为$\{G_n\}$的任一极限映射，则 $G \in H(\Omega, \overline{\Omega})$，而上述讨论表明 $G|_V \equiv b$，因此据唯一性定理知道 $G(z) \equiv b$，$\forall\ z \in \Omega$，故 $G_n(z)$在 Ω 上收敛于 b. 证毕.

定理 11.8 设 $\Omega \subset\subset \mathscr{C}^N$ 是绷紧(taut)区域，$f \in H(\Omega, \Omega)$，那么当且仅当 f 在 Ω 内有一吸性不动点 a 时，对任一满足 f_n 收敛于 f 的序列 $\{f_n\} \subset H(\Omega, \Omega)$，外迭代 $F_n = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ 收敛于 Ω 内一点，而且此时 $F_n(z) \to a$.

证明 如同定理 11.7 的证明一样，只要证明该定理中“当”的部分即可，而且像定理 11.7 那样，存在 $V'' \subset\subset V$，$M > 0$，使得当 $n > M$ 时，有

$$f_n(V) \subset V'' \subset\subset V,$$

$$f(V) \subset V'' \subset\subset V.$$

如同定理 11.5 的证明，可得到某 $\varepsilon > 1$，使得

$$K_V(f_n(z),\ f_n(w)) < \varepsilon K_V(z,\ w),\ \forall\ z,\ w \in V.$$

记

$$F_{M,n} = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_{M+1},$$

则

$$K_V(F_{M,n}(z),\ F_{M,n}(w)) \leqslant \varepsilon^{n-M} K_V(z,\ w) \to 0,\ z,\ w \in V,$$

即

$$\operatorname{diam} F_{M,n}(V) \to 0,$$

故 $F_{M,n}$的任一给定的收敛子列$\{F_{M,n_j}\}$必在 V 上收敛于一点 $b \in V$. 由于 Ω 是 taut 区域，故$\{F_{M,n_j}\}$在 Ω 上是正规族，从而，由唯一性定理知

道 $F_{M,n_j}(z)$收敛于 $b\in V$ 对 $z\in\Omega$ 成立，从而

$$F_{n_j}(z)=F_{M,n_j}\circ F_M(z)\to b,\ \forall\ z\in\Omega.$$

现在根据引理 11.2 的证明，以上所取得的邻域 V 可以任意小，因此，只能是 $b=a$. 这说明$\{F_n(z)\}$的任一收敛子列都在 Ω 上收敛于 a，从而，$\{F_n(z)\}$在 Ω 上收敛于 a. 证毕.

§11.4 $\mathscr{C}^2$ 中多项式自同构的迭代

1969 年 Hénon 研究了实二维 Hénon 映射 ($f(x,y)=(y,y^2+\delta x+c)$，$(\delta\neq 0)$)，受其影响人们展开了$\mathscr{C}^2$ 中多项式自同构的动力学的研究，如今已得到比较系统的理论体系. $\mathscr{C}^2$ 中多项式自同构的动力学研究内容较为庞大，涉及知识较多，限于篇幅，本节仅就其中初步结果作一简单介绍. 其他有关内容可参考本章后面提供的有关文献.

§11.4.1 $\mathscr{C}^2$ 中多项式自同构的分类

$\mathscr{C}^2$ 中多项式自同构的动力学之所以能够得到比较系统的研究，在很大程度上得益于 Friedland 和 Milnor 在 1989 年[FM]证明的如下的分类定理.

定理 11.9 在共轭的意义下，$\mathscr{C}^2$ 的多项式自同构可分为以下三类：

1) 仿射变换类 A：

$A=\{f\in \mathrm{Aut}(\mathscr{C}^2)\ |f$ 是仿射(即线性)变换$\}$；

2) 初等变换类 E：

$E=\{f\in \mathrm{Aut}(\mathscr{C}^2)\,|f$ 把每一水平线 $z_2=c$ 映射成水平线 $z_2=c'\}$

$=\{f\in \mathrm{Aut}(\mathscr{C}^2)\,|f(z)=(\alpha z_1+p(z_2),\ \beta z_2+\delta)$，$\alpha,\ \beta,\ \delta$ 是常数，$\alpha\beta\neq 0$，且 p 是一个次数大于 1 的多项式$\}$；

3) 有限个广义 Hénon 映射的复合 $g=g_m\circ g_{m-1}\circ\cdots\circ g_1$，其中广义 Hénon 映射是如下形式的自同构：

$$f(z) = (z_2,\ p(z_2) - \delta z_1),\ \delta \neq 0,$$

这里 p 是一个次数大于 1 的首一多项式，在 f 的 Jacobi 阵作用下有 $Jf(z) \equiv \delta$.

证明这个定理的关键是利用 Jung 在 1942 年文献[J]中的如下定理.

定理 11.10（Jung 定理[J]） （复或实）坐标平面的多项式自同构群 G 可由其仿射子群 A 与初等子群 E 生成.

定理 11.9 的证明梗概：根据 Jung 的定理，每一个多项式自同构 g 可表为 $g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1$，其中 g_j 交替属于 A 或 E. 把 n 叫做这种表示的长度，在共轭意义下，g 的共轭类中长度最短者，设为 m，称为 g 的长度. m 有两种情形：

(i) $m = 1$，此时 g 共轭于 A 或 E 中的元素，即为 1)与 2)两类；

(ii) $m = 2k$，此时 g 共轭于 $a_k \circ e_k \circ a_{k-1} \circ e_{k-1} \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1$，其中 $a_j \in A$, $e_j \in E$. 每个形如 $a_j \circ e_j$ 的自同构都共轭于一个广义 Hénon 映射，这可通过常规计算给出. 进一步可以证明 $a_k \circ e_k \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1$ 共轭于 m 个广义 Hénon 映射之复合，其细节可参见文献[FM]第 69 至第 74 页.

仿射变换与初等变换的动力学性质是简单的，我们将着眼于有限个广义 Hénon 映射复合的情形. 为了简化记号和叙述方便，所有结论及证明仅对一个单个的广义 Hénon 映射叙述，而其方法可以推广应用于多个这种映射的复合.

§ 11.4.2 不动点

设 $g(z) = (z_2,\ p(z_2) - \delta z_1)$ 是一个 d 次广义 Hénon 映射，给定一点 $z = (z_0,\ z_1) \in \mathscr{C}^2$，采用下述记号来表示 z 在 g^k 下的像是方便的：

$$z = (z_0,\ z_1) \overset{g}{\mapsto} (z_1,\ z_2) \overset{g}{\mapsto} \cdots \overset{g}{\mapsto} (z_k,\ z_{k+1}), \quad (11.26)$$

其中 $z_j = p(z_{j-1}) - \delta z_{j-2}$, $j = 2, 3, \cdots, k+1$.

定理 11.11 设 g 是 d 次广义 Hénon 映射，则 g^k 恰有 d^k 个不动点（包括重数），$k = 1, 2, \cdots$.

证明 据(11.26)式知道,点 $z=(z_0, z_1)$是 g^k 的不动点当且仅当

$$\begin{cases} z_k = z_0, \\ z_{k+1} = z_1. \end{cases}$$

这一方程组与(11.26)式一起化归为

$$\begin{cases} p(z_k) - \delta z_{k-1} - z_{k+1} = 0, \\ p(z_{k-1}) - \delta z_{k-2} - z_k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p(z_2) - \delta z_1 - z_3 = 0, \\ p(z_1) - \delta z_0 - z_2 = 0, \\ z_{k+1} - z_1 = 0, \\ z_k - z_0 = 0, \end{cases} \tag{11.27}$$

这是一个 $k+2$ 元方程组. 根据代数学中的非线性代换定理(Theorem of the Nonlinear Alternative)[F],如果将上述各方程中仅保留最高次项而得到的导出方程组只有平凡解,则原方程组解的个数等于各方程次数之积. 现在,方程组(11.27)的导出方程组是

$$\begin{cases} z_k^d = 0, \\ z_{k-1}^d = 0, \\ \cdots\cdots \\ z_1^d = 0, \\ z_{k+1} - z_1 = 0, \\ z_k - z_0 = 0. \end{cases} \tag{11.28}$$

显然方程组(11.28)只有平凡解,故(11.26)式有 $d \circ d \circ \cdots \circ d \circ 1 \circ 1 = d^k$ 个解,定理得证. 证毕.

定理 11.11 表明,对每一个 k,g^k 恰有 d^k 个不动点,这些不动点可能是 g 的周期为 k 的周期点,也可能是 g 的周期小于 k 的周期点.

Friedland 和 Milnor 在文献[FM]中提出了如下猜想.

猜想 11.1* 设 g 是有限个广义 Hénon 映射的复合，则对所有充分大的 k，g 有周期为 k 的周期点.

下面的定理 11.12 部分地回答了这一问题.

定理 11.12 设 g 是广义 Hénon 映射，则对任意充分大的素数 p，g 有周期为 p 的周期点.

证明 设 p 是素数，如果 g 没有周期为 p 的周期点，则 g^p 的不动点全是 g 的不动点，根据定理 11.10 可知，这样的点最多有 d 个. 据 Shub 和 Sullivan 在 1974 年证明的一个定理(见文献[SS])可知，对 $\mathscr{C}^n$ 的任一连续自映射 f，若 a 是 f 的不动点，则它作为 f^k 的不动点的重数序列 $\{\mu_k\}$ 是有界的，因此 g 的这 d 个不动点作为 g^p 的不动点，其重数有一公共上界 N，从而 g^p 的不动点重数之和小于等于 dN. 另一方面，定理 11.11 表明不动点的重数之和为 d^p，故有 $d^p \leqslant dN$，但当 p 充分大时这是不可能的，故 g 必有周期为 p 的周期点. 证毕.

§ 11.4.3 轨道有界集与非游荡集

设 g 是一个广义 Hénon 映射，仿照一维多项式的情形，引入如下记号：

$$K^{\pm} = \{z \in \mathscr{C}^2 \mid \{g^{\pm n}(z),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\} \text{ 是有界集}\},$$

$$J^{\pm} = \partial K^{\pm},\ K = K^{+} \cap K^{-},\ J = J^{+} \cap J^{-}.$$

容易知道，$K^{\pm}$，$J^{\pm}$，K，J 都是 $\mathscr{C}^2$ 中的闭子集，且在 g 下是完全不变的. 应当注意，这里的 J 与 § 11.1 中的 Julia 集具有不同的意义. 在 $K^{\pm}$ 的定义中 g^{-n} 代表 g^n 的逆映射，也是 g^{-1} 的 n 次迭代. 如果记

$$g(z) = (z_2,\ p(z_2) - \delta z_1),$$

则

$$g^{-1}(z) = \left(\frac{1}{\delta}p(z_1) - \frac{1}{\delta}z_2,\ z_1\right)$$

---

* 这个猜想已于 1993 年由 E. Bedford，M. Lyubich 和 J. Smille 等所证明(见文献[BLS]).

与 g 具有类似的结构，只是方向相反.

本段主要讨论 $K^{\pm}$，$J^{\pm}$，K，J 的性质，先建立两个引理.

引理 11.8 设 g 是一个广义 Hénon 映射，则存在 $M>0$，使得对 $g(z_1, z_2)=(z_2, z_3)$，如果 $|z_2|\geqslant M$，则要么 $|z_3|>2|z_2|$，要么 $|z_1|>2|z_2|$.

证明 注意到 $z_3=p(z_2)-\delta z_1$，$\deg p\geqslant 2$，故存在 $M>0$，使得当 $|z_2|\geqslant M$ 时，$|p(z_2)|>2|z_2|+2|\delta z_2|=2(1+|\delta|)|z_2|$，于是，若 $|z_1|\leqslant 2|z_2|$，则 $|z_3|\geqslant|p(z_2)|-|\delta z_1|>2|z_2|$. 证毕.

根据这一引理，对给定的 g，存在一个 M，使引理 11.8 成立，对此 M，定义

$$V=\{z\in\mathscr{C}^2\,|\,|z_j|\leqslant M,\ j=1,2\},$$

$$V^-=\{z\in\mathscr{C}^2\backslash V\,|\,|z_2|>|z_1|\},$$

$$V^+=\mathscr{C}^2\backslash(V\cup V^-)=\{z\in\mathscr{C}^2\backslash V\,|\,|z_1|\geqslant|z_2|\}.$$

引理 11.9 对如上定义的 V，V^+，V^-，有

1) $g(\overline{V}^-)\subset V^-$;

2) $g(\overline{V}^-\cup V)\subset V^-\cup V$;

3) $g^{-1}(V^+)\subset V^+$;

4) $g^{-1}(V^+\cup V)\subset V^+\cup V$.

证明 1) $\forall\ z\in\overline{V}^-$，即 $|z_2|\geqslant|z_1|$，$|z_2|\geqslant M$，据引理 11.8 得知，必有 $|z_3|>2|z_2|>|z_2|\geqslant M$，故 $g(z)=(z_2, z_3)\in V^-$.

2) 据 1)知，只须证 $g(V)\subset\overline{V}^-\cup V$ 即可. $\forall\ z=(z_1, z_2)\in V$，如果 $|z_3|\leqslant M$，则 $g(z)=(z_2, z_3)\in V$；如果 $|z_3|>M$，则 $|z_3|>|z_2|$，从而 $g(z)\in V^-$.

3) 据 2)知，$V^-\cup V\subset g^{-1}(V^-\cup V)$，从而 $g^{-1}(V^+)=\mathscr{C}^2\backslash g^{-1}(V^-\cup V)\subset V^+$.

4) 根据 1)，同 3)一样即可证明. 证毕.

定理 11.13 对广义 Hénon 映射 g，我们有：

1) $\forall\ z\in\overline{V}^-$，有 $|g^n(z)|\to\infty$，因此 $K^+\subset V\cup V^+$；

2) $\forall\ z\in V^+$，有 $|g^{-n}(z)|\to\infty$，因此 $K^-\subset V\cup V^-$；

3) $K \subset V$，因此 K 是有界集，从而是紧集.

证明 1) $\forall\ z = (z_0, z_1) \in V^-$，按记号(11.26)有 $g^n(z) = (z_n, z_{n+1})$. 由引理 11.8 得知，对 $z \in (z_0, z_1)$，必有 $|z_2| > 2|z_1|$，故 $(z_1, z_2) \in V^-$. 余此类推，导出

$$|z_n| > 2|z_{n-1}| > 2^2|z_{n-2}| > \cdots > 2^{n-1}|z_1| \geqslant 2^{n-1}M \to \infty,$$

故 $|g^n(z)| \to \infty$.

2) 注意到对 $z = (z_1, z_2)$，有 $g^{-1}(z) = \left(\frac{1}{\delta}p(z_1) - \frac{1}{\delta}z_2,\ z_1\right) \equiv (z_0, z_1)$，按这种记法，$z = (z_1, z_2)$ 在 g^{-n}下的轨道为

$$\cdots \leftarrow (z_{-n-1}, z_{-n}) \overset{g^{-1}}{\leftarrow} \cdots \overset{g^{-1}}{\leftarrow} (z_0, z_1) \overset{g^{-1}}{\leftarrow} (z_1, z_2),$$

于是若 $z \in V^+$，则引理 11.9 表明 $g^{-k}(z) \in V^+$，即 $(z_{-k-1}, z_{-k}) \in V^+$，亦即 $|z_{-k-1}| \geqslant |z_{-k}|$，且 $|z_{-k-1}| \geqslant M$. 再注意到 $(z_{-k-1}, z_{-k}) = g(z_{-k-2}, z_{-k-1})$，故由引理 11.8 可知，要么 $|z_{-k}| > 2|z_{-k-1}|$，要么 $|z_{-k-2}| > 2|z_{-k-1}|$. 但由条件 $|z_{-k-1}| \geqslant |z_{-k}|$ 知道只能是 $|z_{-k-2}| > 2|z_{-k-1}|$，于是我们有

$$|z_{-n-1}| > 2|z_{-n}| > \cdots > 2^{n+1}|z_1| \geqslant 2^{n+1}M \to \infty,$$

故 $|g^{-n}(z)| \to \infty$.

3) 由 1)、2)即得证.

证毕.

下面的定理进一步给出了 K^+和 K^-与 K 的具体表达式.

定理 11.14 设 g 是广义 Hénon 映射，则

1) $K^+ = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^{-k}(V \cup V^+)$;

2) $K^- = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^k(V \cup V^-) = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^k(V \cup \overline{V^-})$;

3) 记 $V_k = g^k(V) \cap g^{-k}(V)$，则 $K = \bigcap_{k=0}^{\infty} V_k$.

证明 1) 由 K^+的完全不变性及 $K^+ \subset V \cup V^+$ 得到

$$K^{+} \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} g^{-k}(V \cup V^{+}).$$

其次，对 $z \notin K^{+}$，存在$\{g^{n}\}$的子列 $\{g^{n_k}\}$，使得 $g^{n_k-1}(z) \in V^{-}$. 事实上，按记号(11.26)，记 $z=(z_0, z_1)$，则有 $g^{n}(z)=(z_n, z_{n+1})$，于是有$\{z_n\}$的子列$\{z_{n_k}\}$，使得

$$|z_{n_k}| > \max_{1 \leqslant j < n_k} |z_j|, \ k=1, 2, \cdots,$$

$$|z_{n_k}| > M.$$

显然点 $w_k=(z_{n_k-1}, z_{n_k})=g^{n_k-1}(z) \in V^{-}$，从而 $z \in g^{-(n_k-1)}(V^{-})$，故 $z \notin \bigcap_{k=0}^{\infty} g^{-k}(V \cup V^{+})$，这表明

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} g^{-k}(V \cup V^{+}) \subset K^{+},$$

因此 1)得证.

2)的证明与 1)类似，3)可由 1)和 2)导出，这里从略. 证毕.

为了进一步讨论 $K^{\pm}$，$J^{\pm}$，K，J 的性质，我们再引入如下定义.

定义 11.4 设 $f \in H(\mathscr{C}^n, \mathscr{C}^n)$，点 $p \in \mathscr{C}^n$ 称为 f 的游荡点，如果存在一包含点 p 的开集 $U \subset \mathscr{C}^n$，使得 $U \cap f^{k}(U)=\varnothing$，$k=1, 2, \cdots$. f 的非游荡点的全体构成的点集称为 f 的非游荡集，记作 $\Omega(f)$.

容易看出，若 $f \in \mathrm{Aut}(\mathscr{C}^n)$，则 $\Omega(f)=\Omega(f^{-1})$，且 $\Omega(f)$是$\mathscr{C}^n$ 的完全不变的闭子集.

定理 11.15 设 g 是广义 Hénon 映射，则 $\Omega(g) \subset K \subset V$，因此 $\Omega(g)$是有界集.

证明 根据定理 11.13 的 1)可知，若 $z \in \overline{V}^{-}$，则 $|g^{n}(z)| \to \infty$，故 z 的前向轨道走向无穷，从而 $z \notin \Omega(g)$. 同理对 $z \in V^{+}$ 有 $z \notin \Omega(g)$，因此 $\Omega(g) \subset V$.

其次，若 $z \in V \backslash K$，则有 $z \notin K^{+}$ 或 $z \notin K^{-}$. 对前一种情形，由定理 11.14 的 1)知道，存在 m，使得 $z \in g^{-m}(V^{-})$，即 $g^{m}(z) \in V^{-}$，从而 $g^{m}(z) \notin \Omega(g)$，故 $z \notin \Omega(g)$；对后一种情形，由定理 11.14 的 2)可类似地导出 $z \notin \Omega(g)$，因此 $\Omega(g) \subset K$. 证毕.

下面考虑 K^+，K^-，K 的测度问题. 记 σ 为实四维 Lebesgue 测度，我们有下述定理.

定理 11.16 设 $g(z)=(z_2,\ p(z_2)-\delta z_1)$ 为广义 Hénon 映射，则

1) 若 $|\delta|=1$，则 $\sigma(K^+)=\sigma(K^-)=\sigma(K)<\infty$；

2) 若 $|\delta|<1$，则 $\sigma(K)=\sigma(K^-)=0$，

$$\sigma(K^+)=0 \text{ 或 } \infty;$$

3) 若 $|\delta|>1$，则 $\sigma(K^+)=\sigma(K)=0$，

$$\sigma(K^-)=0 \text{ 或 } \infty.$$

证明 首先注意到 $\delta=\det Dg(z)$.

1) 若 $|\delta|=1$，则 g 是保体积的，而 K 有界，故 $\sigma(K)<\infty$，因此只须证明 $\sigma(K^+\setminus K)=\sigma(K^-\setminus K)=0$. 用反证法：

若 $\sigma(K^+\setminus K)>0$，则存在 $p\in K^+\setminus K$，使得对 p 的任一邻域 U，有 $\sigma(U\cap(K^+\setminus K))>0$. 但由于 $p\notin K$，故 $p\notin\Omega(g)$，因此存在邻域 U_0，使 $U_0\cap\Omega(g)=\varnothing$，且 $\{g^m(U_0)\}$ 是一串互不相交的子集. 记 $V=U_0\cap(K^+\setminus K)$，则 $\sigma(V)>0$，且 $\{g^m(V)\}$ 互不相交，而 $\sigma(g^m(V))=\sigma(V)>0$，因此 $\{g^m(V)\}$ 是无界的，这与 $V\subset K^+\setminus K$ 矛盾，故 $\sigma(K^+\setminus K)=0$. 类似地可证明 $\sigma(K^-\setminus K)=0$.

2) 若 $|\delta|<1$，则 $\sigma(K^\pm)=\sigma(g(K^\pm))=|\delta|\sigma(K^\pm)$，故有 $\sigma(K^\pm)=0$ 或 ∞，因此只须证明 $\sigma(K^-)=0$ 即可. 用反证法：

如果 $\sigma(K^-)>0$，则存在 $p\in K^-$，使对 p 的任一邻域 U 有 $\sigma(U\cap K^-)>0$. 记 $V=U\cap K^-$，则 $\sigma(g^{-m}(V))=|\delta|^{-m}\sigma(V)\to\infty$，由此表明 $\{g^{-m}(V)\}$ 是无界集列，这与 $V\subset K^-$ 矛盾，故 $\sigma(K^-)=0$.

3) 可类似 2)那样给出证明，这里从略.

推论 11.1 若 $|\delta|=1$，则 $\mathrm{int}K^+=\mathrm{int}K^-=\mathrm{int}K$；若 $|\delta|<1$，则 $\mathrm{int}K^-=\varnothing$；若 $|\delta|>1$，则 $\mathrm{int}K^+=\varnothing$.

证明留给读者.

上述定理表明，当 $|\delta|>1$ 时，几乎所有的正向轨道都跑向∞；当 $|\delta|<1$ 时，几乎所有的反向轨道都跑向∞；当 $|\delta|=1$ 时，对几乎所有点，正向轨道有界当且仅当反向轨道有界. 现在有一个问题：对什么样的 g，能保证 $\sigma(K^+)=\sigma(K^-)=0$，从而几乎所有的轨道都双向趋于

无穷？Friedland 和 Milnor 在文献[FM]中提出下述猜想.

猜想 11.2 $\sigma(K^+) > 0$ 当且仅当 g 有一个稳定周期轨道.

设 $f \in \mathrm{Aut}(\mathscr{C}^n)$,$X \subset \mathscr{C}^n$, 在 f 下 X 的稳定流形 $W^s(X)$和非稳定流形 $W^u(X)$分别定义为：

$$W^s(X) = \{q \in \mathscr{C}^n \mid \mathrm{dist}(f^k(q), f^k(X)) \to 0, k \to \infty\},$$

$$W^u(X) = \{q \in \mathscr{C}^n \mid \mathrm{dist}(f^{-k}(q), f^{-k}(X)) \to 0, k \to \infty\}.$$

定理 11.17 设 g 是广义 Hénon 映射,则在 g 下 K 的稳定流形和非稳定流形分别是 K^+ 与 K^-,即 $W^s(K) = K^+$, $W^u(K) = K^-$.

证明 只要证明 $W^s(K) = K^+$, 另一式可类似给出.

若 $z \in W^s(K)$, 则 $\mathrm{dist}(g^k(z), g^k(K)) \to 0$, $k \to \infty$. 由于 K 是紧的,$\{g^k(K)\}$是有界的,因此$\{g^k(z)\}$有界,从而 $z \in K^+$, 即 $W^s(K) \subset K^+$.

其次,要证明 $K^+ \subset W^s(K)$. 由于 K 是完全不变的,因此只须证明以下断言：

任给 $q \in K^+$, 任给 K 在 K^+内的邻域U,即 $K \subset U \subset K^+$, 必存在 M,使对所有 $k > M$,有 $g^k(q) \in U$.

事实上,对取定 q 及 U,必存在有界闭子集 $S \subset K^+$, 使得 $\overline{\{g^k(q)\}_{k=0}^{\infty}} \subset S$.

如果 $S \cap (K^+ \setminus U) = \varnothing$, 则 $S \subset U$, 断言成立.

如果 $S \cap (K^+ \setminus U) \neq \varnothing$, 则对任意 $p \in S \cap (K^+ \setminus U)$, 必有 $p \notin K^-$ (这是因为若 $p \in K^-$, 则 $p \in K \subset U$, 矛盾),因此当 k 充分大时必有 $g^{-k}(p) \notin S$. 由 $S \cap (K^+ \setminus U)$ 的紧性,可找到 $M > 0$, 使当 $k > M$ 时,对任意 $p \in S \cap (K^+ \setminus U)$ 有 $g^{-k}(p) \notin S$. 对此 M,当 $k > M$ 时必有 $g^k(q) \in U$, 否则将由 $p = g^k(q) \in S \cap (K^+ \setminus U)$ 而导出 $q = g^{-k}(p) \notin S$, 这是一个矛盾. 证毕.

推论 11.2 如果 $\mathrm{int}K^+ \neq \varnothing$, 则$\{g^k\}$在 $\mathrm{int}K^+$ 上是正规族.

证明 设 $U_0 \subset \mathscr{C}^2$ 是任一有界开集,如定理 11.16 的证明一样,可证明:对 K 在 K^+内的任一邻域U,必存在 M,使当 $k > M$ 时 $g^k(U_0 \cap K^+) \subset U$,故 $g^k|_{U_0 \cap K^+}$ 是有界的,从而它是正规的,这就证明了推论.

证毕.

§ 11.4.4 双曲广义 Hénon 映射

本段考虑 $J = J^+ \cap J^-$ 是双曲集合的广义 Hénon 映射 g. 为方便起见,我们假定 g 的 Jacobi 行列式 δ 满足 $|\delta| \leqslant 1$, 当 $|\delta| > 1$ 时, 用 g^{-1} 代替 g 可作类似的讨论.

首先给出一些定义.

定义 11.5 设 $P \in \mathscr{C}^2$ 是 g 的周期点,如果 P 的特征值模均不为 1,则称 P 是双曲的.

显然,吸性不动点都是双曲的.

下面的定义把双曲性由周期点推广到了不变集上.

定义 11.6 设 $\Lambda \subset \mathscr{C}^2$ 是 g 的不变集,称 Λ 是 g 的双曲集合,如果存在切丛 $T\mathscr{C}^2_\Lambda$ 的连续子丛 E^u, E^s 及常数 $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, 使得

$$T\mathscr{C}^2_\Lambda = E^s \oplus E^u,\ Dg(E^s) = E^s,\ Dg(E^u) = E^u, \tag{11.29}$$

$$\| Dg^n|_{E^s} \| < c\lambda^n,\ n \geqslant 0, \tag{11.30}$$

$$\| Dg^{-n}|_{E^u} \| < c\lambda^n,\ n \geqslant 0. \tag{11.31}$$

如果在 Λ 的每一点处 E^u 的(复)维数为 k,则称 Λ 的指数(index)为 k.

以上概念适合于一般的$\mathscr{C}^N$ 上的一般同胚 f. 关于 f 的双曲集,下面的稳定流形定理是熟知的,可参见任一本微分动力系统的书籍.

定理 10.18(稳定流形定理) 设 $f: \mathscr{C}^N \to \mathscr{C}^N$ 是同胚,Λ 是 f 的紧致双曲集合,则对每一点 $x \in \Lambda$, 稳定集 $W^s(x)$是一个浸入子流形,其维数与 E^s 相同,而且 $T_xW^s(x) = E^s_x$. 对非稳定集也有类似的结论. 当 f 是全纯的时候,所述子流形是复子流形.

定义 11.7 如果 $J = J^+ \cap J^-$ 是 g 的双曲集,则称 g 是双曲的.

定理 11.19 如果 g 是双曲的,则 J 的指数为 1,而且有 $W^s(J) \subseteq J^+$, $W^u(J) \subseteq J^-$.

证明 记 $\Lambda_k = \{z \in J \mid E^u \text{ 在 } z \text{ 点的维数为 } k\}$, 于是 Λ_0 是一些吸

引轨道的并，从而 $\Lambda_0 \subset \mathrm{int}K^+$. 另一方面 $J \subset \partial K^+$，故 $\Lambda_0 \subset \partial K^-$，因此有 $\Lambda_0 = \varnothing$. 同样的讨论应用于 g^{-1}可导出 $\Lambda_2 = \varnothing$，从而 $\Lambda_1 = J$，即 J 的指数为 1.

要证 $W^s(J) \subseteq J^+$. 首先据定理 11.16，$W^s(J) \subset W^s(K) = K^+$，故只须证明 $W^s(J) \cap \mathrm{int}K^+ = \varnothing$ 即可. 对 $p \in \mathrm{int}K^+$，由推论 11.2 可知，$\{g^n\}$在 $\mathrm{int}K^+$上正规，因此对 P 点的任一切向量，序列$\{|\mathrm{D}g^n(\zeta)|\}$是有界的. 另一方面，下面的讨论表明，对 $p \in W^s(J)$，这一序列是无界的，因此 $\mathrm{int}K^+ \cap W^s(J) = \varnothing$.

现在，取定 J 的一个小邻域 U，我们可以在 U 上构造一个连续锥场(cone field)L：

$$L = \{l_p \mid l_p \subset T_p \text{ 是一个齐性锥}\},$$

使之满足：对 $p \in J$，$\mathrm{int}l_p \supseteq E_p^u$，而 E_p^s 包含在 l_p 的余集之内部. 取 n 充分大，使得对 $p \in J$，有 $\mathrm{D}g^n(l_p) \subset \mathrm{int}l_{g^n}(p)$，且对 $\zeta \in l_p$，有 $|\mathrm{D}g^n(\zeta)| > 2|\zeta|$. 这些性质可在 J 的某邻域 $U_0 \subset U$ 内成立. 如果 $z \in W^s(J)$，则存在 m_0，使得当 $m > m_0$时恒有 $g^m(z) \in U_0$. 取$\zeta \in T_z$，使得 $Dg^n(\zeta) \in l_{g^{m_0(z)}}$，于是对任何正整数 k，有 $|Dg^{m_0+kn}(\zeta)| > 2^k|Dg^{m_0}(\zeta)|$，因此$\{|Dg^m(\zeta)|\}$是无界的. 证毕.

设 Λ 是映射 f 的不变集，称 Λ 具有局部乘积结构，是指对任意给定的 p_1，$p_2 \in \Lambda$，有 $W^s(p_1) \cap W^u(p_2) \subset \Lambda$.

推论 11.3 若 g 是双曲的，则 J 具有局部乘积结构.

证明 由定理 11.19，对任意给定的 p_1，$p_2 \in J$，有 $W^s(p_1) \subset J^+$，$W^u(p_2) \subset J^-$，故 $W^s(p_1) \cap W^u(p_2) \subset J$. 证毕.

根据熟知的有关局部乘积结构和双曲性的结果(如文献[Sh]命题 8.22)我们知道 J 是局部极大的，即有下述推论.

推论 11.4 设 g 是双曲的，则存在 J 的一个邻域 U，使得 $\forall\ \Lambda \subset U$，若 Λ 是不变集，则 $\Lambda \subset J$.

下面的定理表明，虽然双曲性是由 J 决定的，但它却确定了 $\mathrm{int}K^+$ 的动力学性质.

定理 11.20 若 g 是双曲的，则 $\mathrm{int}K^+$由有限多个吸引盆构成.

证明 若 $|\det Dg(z)|>1$，则 $\mathrm{int}K^+=\varnothing$，结论自明，因此只须假定 $|\det Dg(z)|=|\delta|\leqslant 1$. 考虑 $\mathrm{int}K^+$ 的连通分支，若这样的一个分支不是周期的或终于周期的，则称之为游荡的，于是定理的证明是以下三个断言的直接推论：

1）不存在游荡分支；

2）每个周期或终于周期分支都是吸引盆；

3）只有有限多个吸引轨道.

现证明 1). 如果 $|\det Dg(z)|=1$，则定理 11.16 说明 $\mathrm{int}K^+$ 的 Lebesgue 测度有限，从而由 Poincaré 回归定理(Poincaré Recurrence Theorem)知道，几乎所有点都是回归的，故没有游荡分支.

如果 $|\det Dg(z)|<1$，则可用反证法证明本断言. 假设 $\mathrm{int}K^+$ 有一个游荡分支 C. 取 $p\in C$，记 L 为序列 $\{g^n(p)\}$ 的极限点集. 根据定理 11.15 与定理 11.17 知 $L\subset V$. 又 L 在 g^{-1} 下是不变的且是有界的，故 $L\subset K^-$，而由 $|\det Dg(z)|<1$ 知 $\mathrm{int}K^-=\varnothing$，因此 $L\subset J^-$.

其次可以证明 $L\cap\mathrm{int}K^+=\varnothing$. 事实上，若存在 q，$q\in L\cap\mathrm{int}K^+$，记 C_0 为 $\mathrm{int}K^+$ 的包含 q 的连通分支，则对充分大的 n 有 $g^n(p)\in C_0$. 特别，存在两个不相等的 n_1，n_2，使 $g^{n_1}(p)\in C_0$，$g^{n_2}(p)\in C_0$，因此 $g^{n_1}(C)=g^{n_2}(C)$，这与 C 是游荡的假设相矛盾，故 $L\cap\mathrm{int}K^+=\varnothing$，从而 $L\subset J^+$.

以上两段表明 $L\subset J$，即 $\{g^n(p)\}$ 的所有极限点位于 J，这说明 $p\in W^s(J)$，而由定理 11.19 又知必有 $p\in J^+=\partial K^+$，这与 $p\in C\subset\mathrm{int}K^+$ 矛盾，故 $\mathrm{int}K^+$ 没有游荡分支.

再证明 2). 显然只须考虑周期分支的情形，设 C' 是一个周期为 m 的周期分支，用 g^m 代替 g，可不妨设 $m=1$，即 $g(C')=C'$，令 $C=C'\cap V$，则由 $g(V)\subset V\cup V^-$，$g(C')=C'\subset K^+\subset V\cup V^+$ 知，$g(C)\subset V$，而且 $g(C)\subset g(C')=C'$，故有 $g(C)\subset C$，因此 g 是一个有界区域 C 的全纯自映射，且 $\{g^n|_C\}$ 是正规族. 以下只须证明 $\{g^n|_C\}$ 收敛于 C 内一点即可.

首先，证明 $\forall\ p\in C$，$\{g^n(p)\}$ 在 ∂C 上没有极限点. 实际上，利用定理 11.3 的证明方法，不难证明：要么 $\{g^n(p)\}$ 的极限点集 $L\subset\partial C\subset$

J^+，要么存在 C 的子流形 S，使对 $\{g^n\}$ 的任一极限映射 G 有 $G(C) = S$. 我们证明前者是不可能的. 否则，由于 $L \subset \partial C \subset J^+$ 且 L 在 g^{-1} 下完全不变，如同 1)的证明可知 $L \subset J$，从而 $C \subset W^s(J) \subset J^+$，这与 $C \subset \mathrm{int}K^+$ 矛盾.

现在，根据定理 11.3 的证明可知，存在子序列 $\{g^{n_j}\}$，$g^{n_j} \to R_g$，$R_g|_S = id$，我们只须证明 $\dim S = 0$ 即可，我们采用反证法. 假设 $\dim S > 0$，因 S 是 $\mathscr{C}^2$ 的复子流形，S 不能是紧致的，而且由于 S 是完全嵌入 C 内的，故有 $\partial S \subset \partial C \subset J^+$. 现在 ∂S 是 J^+ 的紧致不变子集，而 J^+ 的唯一紧致不变子集是含于 J 的，故有 $\partial S \subset J$. 由推论 11.4 可知，存在 J 的开邻域 U，使 J 在 U 中是最大的不变子集，点集 $S \backslash U$ 是 S 的紧子集. 由于 g 是 S 的同构，故 $Q = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(S \backslash U)}$ 是紧集. 但因 S 是非紧致的，所以存在 $p \in S \backslash Q$，由于 Q 是不变的，故 p 的轨道位于 Q 的余集中，因此 $\{g^n(p)\} \subset U$. 而 $p \notin J$，这与 J 在 U 中是极大的相矛盾，因此必有 $\dim S = 0$，即 $S = \{a\}$，$g^n(z) \to a$，$\forall \ z \in C$. 由唯一性定理，在整个分支 C' 上有 $g^n(z) \to a$，故 C' 是吸引盆.

如果 $|\det \mathrm{D}g(z)| = 1$，则 g 没有吸引点，故 $\mathrm{int}K^+ = \varnothing$，因此下面的证明假定 $|\det \mathrm{D}g(z)| < 1$.

最后证明 3). 如果 g 有无限多个吸引点，则这些吸引点有极限点，设 q 为其中一个，如 2)中的讨论可知 $q \notin \mathrm{int}K^+$，从而 $q \in J^+$. 将吸引点的极限点集记作 L，则 $L \subset J^+$，而且 L 是 V 的不变子集，故 $L \subset K \subset K^-$，由 $|\det Dg(z)| < 1$ 知 $K^- = J^-$，故 $L \subset J$.

由推论 11.4 得知，存在 J 的邻域 U，使得 J 在 U 中是最大不变集，而且由 $L \subset J$ 知存在吸引点 $a \in U$，这与 J 是 U 中最大不变集矛盾，故 g 只有有限多个吸引点. 证毕.

推论 11.5 若 g 是双曲的且 $|\det Dg(z)| = 1$，则 $\mathrm{int}K^+ = \mathrm{int}K^- = \mathrm{int}K = \varnothing$.

证明 由定理 11.20 及推论 11.1，即得证. 证毕.

这一推论表明猜想 11.2 对双曲映射是正确的.

定理 11.21 若 g 是双曲的，$|\det \mathrm{D}g(z)| \leqslant 1$，$P_1$，$P_2$，$\cdots$，$P_n$ 是

g 的全部吸引点，则 $W^S(J) = J^+$, $W^u(J) = J^- \setminus \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$.

证明 先证 $W^S(J) = J^+$. 由定理 11.19 得知，只须证 $J^+ \subset W^S(J)$. 由定理 11.17 得 $J^+ \subset K^+ = W^S(K)$, 而又由 J^+ 是闭的知道 $J^+ \subset W^S(K \cap J^+)$. 注意到 $K^- = J^-$, 得 $K \cap J^+ = K^+ \cap K^- \cap J^+ = K^- \cap J^+ = J^- \cap J^+ = J$, 于是 $W^S(J) = J^+$.

其次证明 $W^u(J) = J^- \setminus \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$. 由定理 11.19 有 $W^u(J) \subset J^-$, 而 $\{P_j\}$ 是吸引周期点，故 $P_j \notin W^U(J)$, 因此 $W^u(J) \subset J^- \setminus \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$. 反过来，若 $P \in J^- \setminus \mathrm{int}K^+$, 则 $P \in J^- = K^- = W^u(K)$. 由于 $J^- \setminus \mathrm{int}K^+$ 是闭的，因此有 $P \in W^u(K \cap (J^- \setminus \mathrm{int}K^+)) = W^u(J^+ \cap J^-) = W^U(J)$, 即 $p \in W^u(J)$. 同样若 $P \in J^- \cap \mathrm{int}K^+$, 则由定理 11.20 知 P 位于某一吸引盆内. 如果 P 本身不是吸引点，则 $g^{-n}(P) \to \partial K^+ = J^+ (n \to \infty)$, 故 $P \in W^u(J^+)$, 从而再由 $P \in J^-$ 得 $P \in W^u(J)$, 于是 $J^- \setminus \{P_1, \cdots, P_n\} \subset W^u(J)$. 证毕.

注 本章第 1 至第 3 节的内容分别取自张文俊、任福尧、乔建永等的文章[ZR1, ZR2, ZRQ]. 第 4 节的内容取自 S. Friedland 和 J. Milnor 的文章[FM]以及 E. Bedford 和 J. Smille 的文章[BS1].

关于 Denjoy-Wolff 型定理，其原型是由 Wolff 给出的，1926 年由 Denjoy 加以改进，可参看文献[D]. 它在高维的推广，最早由 M. Hervé 在 1963 年给出 $\mathscr{C}^n$ 中单位球上的结果[Her]，其后在 1983 年至 1989 年，在文献[Ch, Ku, Muc, Su1, Su2]中分别讨论了 $\mathscr{C}^n$ 中单位球与 C^2 凸区域的情形. 1988 年 M. Abate 在文章[A]中引进极限球面的概念并据此给出 C^2 凸区域上的 Denjoy-Wolff 型定理，随后马道伟于 1991 年利用文章[A]的某些结果讨论了 $\mathscr{C}^2$ 中光滑边界的可收缩强拟凸域上的情况(见文献[Ma]).

关于有界区域上的随机迭代，其背景以及单变量的有关结果可参见文献[Bar, BD, BR, G1, G2, Lo]等.

对于 $\mathscr{C}^2$ 中多项式自同构的迭代问题，内容已比较丰富，限于篇幅，我们只列入极少一部分，作为这一方向的一个导引. 这方面的主要成就集中于 1989 年以后的有关文献，如文献[FM, BS1, BS2, BS3, BS4, FS]等，有兴趣的读者可进一步查看这些文献.

参考文献

[BLS] E. Bedford, M. Lyubich and J. Smille, Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of C. *Invent. Math.* 114 (1994), 277-288.

[A] M. Abate, Holospheres and iterates of holomorphic maps. *Math. Z.* 198 (2) (1988), 225-238.

[BR] I. N. Baker and P. J. Rippon, On compositions of analytic self-mappigs of a convex domain. *Arch. Math.* 55 (1990), 380-386.

[BS1] E. Bedford and J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of $\mathscr{C}^2$: Currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. Math.* 130 (1) (1991), 69-99.

[BS2] E. Bedford and J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of $\mathscr{C}^2$: Stable manifolds and recurrence. *J. Amer. Math. Soc.* 4 (4) (1991), 657-679.

[BS3] E. Bedford and J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of $\mathscr{C}^2$: Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. *Math. Ann.* 294 (1992), 395-420.

[BS4] E. Bedford and J. Simillie, Fatou-Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms. *Indiana Univ. Math J.*, 40 (1991), 789-792.

[Bar] M. F. Barnsley, Lecture notes on iteration function systems. *Proc. of Symposia in Appl. Math.*, 39 (1989), 127-144.

[BD] M. F. Barnsley and S. Demko, Iteration function systems and global construction of fractals. *Proc. R. Soc. London*, A 399 (1985), 234-275.

[Ca] A. Calka, On conditions under which isometries have bounded

orbits. *Colloquium Math.* 48 (1984), 219-227.

[Ch] G. N. Chen, Iteration of holomorphic maps of the open unit ball and the generalized upper half plane of $\mathscr{C}^N$. *J. Math. Anal. Appl.*, 98 (1984), 305-313.

[D] A. Denjoy, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, 182 (1926), 255-257.

[F] S. Friedland, Inverse eigenvalue problems. *Linear Alg. Appl.* 17 (1977), 15-51.

[FM] S. Friedland and H. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Erg. Th. & Dyn. Sys.* 9 (1) (1989), 67-99.

[FS] J. E. Fornass and N. Sibony, Complex Henon mappings in C and Fatou-Bieberbach domains. *Duke Math. J.* 65 (1992), 345-380.

[G1] J. Gill, Compositions of analytic functions. *J. Comp. Appl. Math.* 23 (1988), 179-184.

[G2] J. Gill, Inner compositions of analytic mappings on the unit disk. *Intern. J. Math and Math. Sci.*, 14 (2) (1981), 221-226.

[Her] M. Hervé, Quelques propértés des applications analytique d'une beule a m dimensions dans elle-même. *J. Math. Pure Appl.* 42 (9) (1963), 117-147.

[J] H. W. E. Jung, Über ganze birationale transformationen der ebene. *J. Reine Angew. Math.* 184 (1942), 161-174.

[GS] T. Kucsumoiv and A. Stachura, Iterates of holomorphic and K-nonexpensive mappings in convex domains in $\mathscr{C}^N$. *Adv. in Math.* 81 (1990), 90-98.

[Ku] Y. Kubota, Iteration of holomorphic maps of the unit ball into itself. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88 (1983), 476-480.

[Lo] L. Lorentzen, Compositions of contractions. *J. Comp. Appl.*

Math., 32 (1990), 169-178.

[Muc] B. MucCtuer, Iterates of holomorphic self-maps of the unit ball in $\mathscr{C}^N$. *Mich. Math. J.* 30 (1983), 97-106.

[Sh] M. Shub, *Global Stability of mappings.* Springer-Verlag, 1987.

[Su1] M. Suzuki, The fixed point set and the iterational limits of a holomorphic self-map. *Kodai Math. J.* 10 (1987), 298-306.

[Su2] M. Suzuki, Iterates of holomorphic self-maps on a convex domain. *Kobe J. Math.* 6 (1989), 229-232.

[SS] M. Shub and D. Sullivan, *Lecture notes in Math.* 1007 (1983), 109-131.

[ZR1] Wen-jun Zhang and Fu-Yao Ren, Random iteration of holomorphic self-maps over bounded domains in $\mathscr{C}^N$. *Chin. Ann. of Math.* 16 B (1995), 33-42.

[ZR2] Wen-Jun Zhang and Fu-Yao Ren, On iterations of holomorphic self-maps of $\mathscr{C}^N$. *J. of Fudan Univ.* (*N. S.*), 33 (4) (1994), 452-462.

[ZRQ] Wen-Jun Zhang, Fu-Yao Ren and Jian-Yong Qiao. *On iterates of holomorphic maps in strongly pseudoconvex domains, Proc. of the Conference on Complex Analysis, Ed. Zhong Li etc.*, International Press, Boston, (1994), 245-253.

[Ma] D. Ma, On iterates of holomorphic maps, *Math. Z.*, 207 (1991), 417-428.